

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉTHODES D'APPROXIMATION
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THÉORIE DES NOMBRES**

par

Jean-François JAULENT

**STRUCTURES GALOISIENNES DANS LES
EXTENSIONS MÉTABELIENNES**



Soutenue le 25 juin 1979, devant la Commission d'Examen

MM. G. POITOU, Professeur à l'Université de Paris XI

Président

G. GRAS, Professeur à l'Université de Franche-Comté

J.J. PAYAN, Professeur à l'Université de Grenoble I

J. COUGNARD, Maître de Conférences à l'Université
de Franche-Comté

} Examineurs

THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES DE
L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

pour obtenir le

**DIPLÔME DE DOCTEUR EN MÉTHODES D'APPROXIMATION
ET ALGORITHMES EN ANALYSE ET THÉORIE DES NOMBRES**

par

Jean-François JAULENT

**STRUCTURES GALOISIENNES DANS LES
EXTENSIONS MÉTABELIENNES**



Soutenue le 25 juin 1979, devant la Commission d'Examen

MM. G. POITOU, Professeur à l'Université de Paris XI

Président

G. GRAS, Professeur à l'Université de Franche-Comté

J.J. PAYAN, Professeur à l'Université de Grenoble I

J. COUGNARD, Maître de Conférences à l'Université
de Franche-Comté

} Examinateurs

THESIS

A LA FACULTE DES SCIENCES ET DES LETTRES
DE L'UNIVERSITE DE LEIDEN

par

DIPLOME DE DOCTEUR EN LETTRES
ET ADOPTIF EN SCIENCE

THESE



STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES DANS LES
EXTENSIONS MÉTHABOLISME

par

M. J. J. VAN DER WOUDE
Né le 15 mars 1925 à Amsterdam
Leiden, le 15 mars 1955

UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE - BESANCON

Président : Monsieur LÉVÊQUE Pierre

FACULTE DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

DOYEN

Mr GALATRY Louis
Professeur : Physique Moléculaire

ASSESEURS

Mr BLAISON Jean : Géologie-Minéralogie
Maître-Assistant

PROFESSEURS

Mrs LHOTE François : Chronométrie
PERROT Roger : Chimie Générale
PLUVINAGE Philippe : Physique Théorique
CHALEAT Raymond : Mécanique Appliquée
BERNARD Jean : Chimie-Physique
RIPPLINGER Jean : Physiologie Animale
GREMILLARD Jean : Mathématiques
VIENOT Jean-Charles : Physique Gle Optique
THIEBAUT Jean : Pétrographie-Minéralogie
GOMOT Lucien : Zoologie et Embryologie
THEOBALD J-Gérard : Spectroscopie Hertzienne
CERUTTI Ernest : Chimie Appliquée
DEVIN Claude : Chimie 1er cycle
CAPODANNO Pierre : Mécanique Théorique
BANTEGNIE Robert : Mathématiques
ROBERT Daniel : Physique Moléculaire
ROBERT Jacques : Mathématiques I
CHAUVE Pierre : Géologie-Minéralogie
RANGHEARD Yves : Géologie
BIDAULT Michel : Taxonomie Expérimentale
GRAS Georges : Mathématiques

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mrs POTIER Robert : Physique des Solides
REAL Pierre : Ecologie Animale
GOUARNE René : Mathématiques
MERIGOUX Henri : Cristallographie et
Synthèses minérales
OLIVIER Marcel : Electronique Quantique
MONTAGNER Hubert : Psychophysiologie
BULABOIS Jean : Physique Gle-Optique
GAUDEMER Yves : Biochimie
LAUDE Bernard : Chimie Organique
MIELLOU Jean-Claude : Analyse Numérique
ROBERT Guy : Electrochimie
DUBOUCHET Jacques : Botanique

DOYENS HONORAIRES

Mrs GLANGEAUD, JACQUEMAIN, CHATELET,
THIEBAUT, BERNARD

PROFESSEURS HONORAIRES

Mrs THIRY, TRILLAT, UEBERSFELD,
VINCENSINI, TRONCHET, THEOBALD N.,
QUANTIN, BENNETON, CHATELET.

MAITRE DE CONFERENCES HONORAIRES

Mr GRANIER

MAITRES DE CONFERENCES

Mrs WEIL Michel : Mathématiques
BROQUET Paul : Géologie
TREHEL Michel : Informatique
MILLET Bernard : Botanique
BENILAN Philippe : Mathématiques
COUGNARD Jean : Mathématiques
BRUCKERP Sylvain : Ecologie Végétale
LALLEMENT G. : Mécanique Appliquée
LESAIN Pierre : Mathématiques I
MOREELS Guy : Astronomie

RESPONSABLE DES SERVICES ADMINISTRATIFS

Mr RUNGE Jean-Marie



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546609_0004

¶ Georges Poitou qui a guidé mes premiers pas dans le monde arithmétique , et qui m'a fait l'honneur et le plaisir de présider le jury , je tiens à exprimer ma profonde gratitude .

¶ Georges Gras , qui m'a reçu à Besançon , encouragé de ses suggestions et fortifié de ses conseils, qu'il me soit permis de témoigner ma plus vive reconnaissance .

¶ Jean-Jacques Payan , qui a manifesté l'intérêt qu'il porte à cette thèse en acceptant de faire partie du jury de soutenance, j'adresse tous mes remerciements .

¶ Jean Cougnard , auprès de qui j'ai toujours trouvé une oreille attentive , et dont l'amicale compréhension ne m'a jamais fait défaut , je fais part de ma particulière gratitude .

Je voudrais enfin exprimer ma reconnaissance

à René Smadja , sans qui la partie numérique de ce travail n'aurait jamais vu le jour ;

à Gisèle Cirade , pour l'aide qu'elle m'a apportée ;

à tous mes collègues du laboratoire de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Besançon , auprès de qui j'ai reçu l'accueil le plus chaleureux ;

à tous ceux qui , au secrétariat de Mathématiques et à l'imprimerie , ont contribué à la réalisation matérielle de ce travail .

"Ες θυμὸν ὧν βάλεο καὶ τὸ παλαιὸν
ἔπος ὥς εὔ εἴρηται ,
τὸ μὴ ἅμα ἀρχῇ πᾶν τέλος καταφαίνεσθαι "

Hérodote - Histoires VII , 51 .

SOMMAIRE

Introduction .-

CHAPITRE I : Présentation des extensions métabéliennes .

- 1 . Définition du groupe et théorie de Galois . I.2
- 2 . Ramification dans les extensions métacycliques . I.5

CHAPITRE II : Structure des G -modules noëthériens .

- 1 . Représentations absolument irréductibles d'un groupe métabélien . II.2
- 2 . Dévissage des modules noëthériens sur l'algèbre $\mathbb{Z}[G]$. II.6
- 3 . Structure des modules noëthériens sur l'algèbre ℓ -adique $\mathbb{Z}_\ell[\zeta \cdot T]$. II.10
- 4 . Application à la classification des $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules lorsque G est métacyclique d'ordre ℓ^n . II.15
- 5 . Etude des modules de $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion sur l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G]$. II.19

CHAPITRE III : Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers .

- 1 . Position du problème . III.2
- 2 . Description du corps miroir associé aux résolvantes de Lagrange . III.5
- 3 . Détermination de l'invariant global pour une extension métacyclique . III.11
- 4 . Structure locale de l'anneau des entiers d'une extension métabélienne . III.17

CHAPITRE IV : Groupes de ℓ -classes d'idéaux .

- 1 . Description des groupes de ℓ -classes d'idéaux . IV.2
- 2 . Formule des classes ambiges pour les extensions métabéliennes . IV.6
- 3 . Suite exacte du groupe des genres . IV.11
- 4 . Formule du nombre de classes dans les extensions métabéliennes . IV.16
- 5 . Relation du miroir et application aux conditions d'annulation du groupe des ℓ -classes . IV.24

CHAPITRE V : Etude du G -module des unités .

- | | | |
|-----|---|------|
| 1 . | Description des groupes d'unités dans les extensions métabéliennes . | V.2 |
| 2 . | Propriétés galoisiennes des groupes d'unités relatives d'une extension métacyclique . | V.7 |
| 3 . | Détermination des indices locaux pour une extension métabélienne . | V.13 |
| 4 . | Calcul de l'indice des unités et application à la formule des classes . | V.20 |
| 5 . | Structure du groupe des unités d'une extension métabélienne de degré $\ell n'$. | V.28 |

CHAPITRE VI : Résultats numériques .

- | | | |
|-----|---|-------|
| 1 . | Tables de corps cycliques réels dont le ℓ -groupe des classes est cyclique . | VI.2 |
| 2 . | Table des corps diédraux $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}, \sqrt{-3}]$. | VI.4 |
| 3 . | Table des corps diédraux réels de degré 6 . | VI.15 |

Bibliographie . -

INTRODUCTION

Etant donné un corps de nombres algébriques N , de degré fini sur le corps des nombres rationnels, le problème majeur de l'arithmétique de N est l'étude de l'anneau de ses entiers A_N , et plus particulièrement du groupe des classes d'idéaux de A_N et du groupe multiplicatif de ses éléments inversibles.

Lorsque le corps N est une extension normale de l'un de ses sous-corps H , ce problème se pose de façon naturelle en termes galoisiens : En effet, le groupe $\text{Gal}(N/H)$ des H -automorphismes de N opère sur l'anneau A_N ; de sorte que l'anneau des entiers, les groupes de classes et d'unités sont canoniquement des modules noëthériens sur l'algèbre du groupe de Galois.

La question se pose alors de déterminer cette structure.

Une façon de l'aborder consiste à étudier des cas particuliers ; par exemple en se donnant a priori le groupe de Galois.

C'est ce que nous faisons ici, en prenant pour $\text{Gal}(N/H)$ un groupe métabélien G' , produit semi-direct d'un groupe S cyclique d'ordre ℓ -primaire et d'un groupe abélien T' , d'ordre premier à ℓ , agissant sur S par automorphismes intérieurs. Ce choix du groupe G' se justifie en ce qu'il contient le cas métacyclique (obtenu par une action fidèle de T') et un cas abélien (correspondant à une action triviale) sur lesquels de nombreux résultats sont aujourd'hui connus. On ne s'étonnera donc pas que nous ayons été amené à reprendre un certain nombre de calculs pour les exprimer dans le cadre plus général que nous nous sommes fixé.

Dans le chapitre II , nous rassemblons les principaux résultats concernant l'étude des modules de type fini sur l'algèbre d'un groupe métabélien . Une façon naturelle d'étudier un tel module est de se ramener par une série de dévissages à considérer des modules sur une algèbre à produits croisés . Les propriétés de ces derniers sont en effet bien connues depuis les résultats de M. Rosen [Ro] qui font apparaître deux sortes d'invariants :

- un invariant global d'une part, représenté par une classe d'idéaux
- un certain nombre d'indices d'autre part , dont le calcul relève de méthodes locales .

C'est cette dernière partie que nous avons plus particulièrement approfondie . A chaque caractère ℓ -adique irréductible du groupe T' , correspond un idempotent de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G']$ et c'est cette décomposition convenablement exploitée que nous mettons en œuvre, pour décrire par une extension adéquate des résultats de M.P. Lee [Lee] et Lena Chang Pu [LCP], l'ensemble des modules indécomposables sur l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G']$, lorsque G' est métabélien d'ordre $\ell n'$.

Nous étendons cette étude aux cas des modules de torsions pour l'appliquer plus loin aux groupes d'unités .

Auparavant , nous consacrons le chapitre III à l'étude des anneaux d'entiers .

La détermination , désormais classique , de l'invariant global s'appuie sur la méthode des résolvantes de Lagrange qui permet de la ramener à un calcul de norme dans une extension abélienne . Les démonstrations sont donc analogues à celles développées dans [Co2] . L'étude des indices locaux s'inspire également des résultats de J. Cougnard [Co3] sur les extensions métacycliques sauvagement ramifiées , et n'en diffère pas substantiellement .

La confrontation de ces calculs avec les théorèmes de structure du chapitre précédent nous permet de décrire explicitement la structure locale de l'anneau des entiers d'une extension métabélienne . En particulier nous précisons comment l'ordre associé s'obtient à partir de certains idempotents de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G']$ déterminés par les sous-groupes de ramification sauvage, et nous montrons que l'anneau A_N est localement libre sur cet ordre .

Nous étudions ensuite le groupe des classes d'idéaux et nous concentrons , dès le début du chap.IV , notre attention sur sa ℓ -partie . Deux groupes importants jouent ici un rôle essentiel : le sous-groupe des classes ambiges et le groupe des genres . Ce sont donc eux que nous étudions en priorité, en déterminant leurs diverses composantes, par une généralisation convenable de la méthode de Chevalley . Le résultat le plus remarquable est que , contrairement au cas abélien ([Gi] , [Gr2]) les formules obtenues pour l'un et pour l'autre ne coïncident pas . Ce résultat , qui est à l'origine de la formule des classes , fournit une mesure directe de l'écart entre deux composantes du groupe des ℓ -classes d'idéaux , et contient de ce fait les résultats de [MHK] .

Nous poursuivons cette étude au chapitre V par celle des groupes d'unités . Les formules précédentes faisant intervenir de façon décisive certains indices d'unités, nous montrons par une extension convenable des méthodes de [HK2] comment ils sont reliés à la structure galoisienne du groupe , et nous en détaillons le calcul . Nous terminons en mettant en œuvre les résultats du chapitre II pour expliciter les diverses structures locales algébriquement compatibles avec l'arithmétique des unités . Les indices qui les caractérisent sont directement gouvernés par la formule des classes ambiges et par celle des genres , de sorte que des considérations simples sur la ramification fournissent des exemples dans lesquels il est possible de préciser a priori la structure du groupe des unités .

Nous illustrons ces points au chapitre VI où nous avons réuni des tables de corps métacycliques et diédraux pour lesquels nous donnons la structure galoisienne des groupes de ℓ -classes relatives et des groupes d'unités .

Mais auparavant le lecteur pourra faire connaissance avec les extensions métabéliennes au chapitre I .

CHAPITRE I

PRESENTATION DES EXTENSIONS METABELIENNES

Ce premier chapitre est destiné à fixer un certain nombre de définitions et de notations auxquelles nous nous référons en permanence .

Nous y donnons une présentation des groupes métabéliens en termes de caractère ℓ -adique , puis nous en précisons les sous-groupes et quotients remarquables . Par la théorie de Galois élémentaire , nous en déduisons le treillis des sous-corps d'une extension normale à groupe métabélien .

Une première application à l'arithmétique de ces corps est l'étude de la ramification .

1. DEFINITION DU GROUPE ET THEORIE DE GALOIS .

§ 1 . De façon générale un groupe métacyclique est, par définition , un produit semi-direct de deux groupes cycliques .

Plus précisément nous adoptons ici la convention suivante :

Definition 1.1 . Etant donnés ℓ un nombre premier impair , s un entier naturel non nul , et n un diviseur de $(\ell-1)$, nous entendons par groupe métacyclique d'ordre $\ell^s n$ tout produit semi-direct de centre trivial d'un groupe cyclique d'ordre ℓ^s par un groupe cyclique d'ordre n .

Comme exemples de tels groupes , citons :

EXEMPLE . Tout groupe non abélien d'ordre pq , p et q premiers , est métacyclique . Ainsi , tout groupe diédral d'ordre 2ℓ , ℓ premier .

Considérons maintenant un groupe métacyclique G , d'ordre $\ell^s n$. D'après la définition , il peut être décrit par une suite exacte courte scindée :

$$1 \longrightarrow S \longrightarrow G \longrightarrow T \longrightarrow 1 ,$$

dans laquelle S est un sous-groupe cyclique distingué d'ordre ℓ^s , et T un groupe cyclique d'ordre n qui opère fidèlement sur S par automorphismes intérieurs . Autrement dit , le groupe G est engendré par deux générateurs σ et τ avec les relations :

$$\sigma^{\ell^s} = \tau^n = 1 \quad \text{et} \quad \tau \sigma \tau^{-1} = \sigma^r ,$$

où r est une racine $n^{\text{ième}}$ primitive de l'unité modulo ℓ^s .

Relevant r en une racine ρ dans l'anneau $\mathbb{Z}_{\ell}$, nous pouvons encore écrire cette dernière condition :

$$\tau \sigma \tau^{-1} = \sigma^{\rho} .$$

Il suit en particulier que l'application de T dans le groupe $\text{Aut } S$ des automorphismes de S se factorise par un caractère ℓ -adique primitif du groupe T . En effet , si χ est le caractère de T défini par $\chi(\tau) = \rho$, nous obtenons l'identité :

$$\theta \eta \theta^{-1} = \eta^{\chi(\theta)} , \quad \text{pour tous } \theta \text{ de } T \text{ et } \eta \text{ de } S .$$

Proposition 1.1 . Un groupe métacyclique G d'ordre $\ell^s n$ est défini par la donnée de son sous-groupe dérivé S , cyclique d'ordre ℓ^s , d'un sous-groupe arbitraire T d'ordre n et d'un caractère ℓ -adique primitif χ de T .

§ 2 . Cette présentation des groupes métacycliques nous amène à poser la définition plus générale suivante :

Définition 1.2 . Etant donnés ℓ un nombre premier impair , s un entier naturel non nul , et n' un entier n'ayant d'autre diviseur premier que ceux de $(\ell-1)$, nous entendons par groupe métabélien d'ordre $\ell^s n'$ tout produit semi-direct G' d'un groupe cyclique S d'ordre ℓ^s par un groupe abélien T' d'ordre n' .

La condition sur les facteurs premiers de n' signifie que le groupe abélien T' a pour exposant un diviseur de $(\ell-1)$. Cette restriction doit être comprise comme une hypothèse de semi-simplicité sur l'algèbre ℓ -adique $\mathbb{Z}_\ell[T']$.

Considérons alors un groupe métabélien G' d'ordre $\ell^s n'$. La suite exacte courte qui lui est associée par la définition :

$$1 \longrightarrow S \longrightarrow G' \longrightarrow T' \longrightarrow 1 ,$$

est scindée par une application g de T' dans le groupe $\text{Aut } S$ des automorphismes de S . Puisque , par hypothèse , l'ordre n' de T' est premier à ℓ , cette application se factorise comme plus haut par un caractère ℓ -adique χ du groupe T' ; de sorte que nous pouvons écrire :

$$\tau \eta \tau^{-1} = \eta \chi(\tau) , \text{ pour tout } \tau \text{ de } T' \text{ et } \eta \text{ de } S .$$

Proposition 1.3 . Un groupe métabélien G' d'ordre $\ell^s n'$ est défini par la donnée de son ℓ -sous-groupe de Sylow S d'ordre ℓ^s , d'un sous-groupe T' isomorphe à G'/S , et d'un caractère ℓ -adique χ de T' .

Lorsque χ n'est pas le caractère unité de T' , le centre de G' est le noyau $\text{Ker } \chi$, le sous-groupe dérivé est le groupe S , et le quotient $G'/\text{Ker } \chi$ est un groupe métacyclique .

La démonstration de la proposition est immédiate à partir de la relation de commutation $\tau \eta \tau^{-1} = \eta \chi(\tau)$.

Dans ce qui suit nous ferons souvent référence au cas particulier où le noyau $\text{Ker } \chi$ est facteur direct du groupe T' ; ce qui s'écrit $T' = T \times \text{Ker } \chi$, pour un groupe cyclique T . Dans cette hypothèse, le groupe G' est composé direct de son centre $R = \text{Ker } \chi$ et du sous-groupe métacyclique maximal $G = S \times_{\theta} T$.

La décomposition maximale de G' est alors obtenue en écrivant R comme produit de groupes cycliques primaires $\prod_{j \in J} R_j$; ce qui donne $G' = G \prod_{j \in J} R_j$.

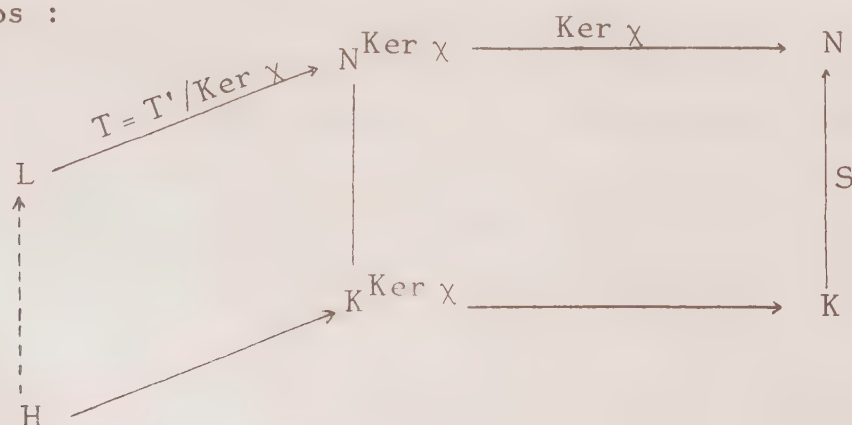
§ 3. Dans ce qui suit, nous désignons par H un corps de nombres algébriques de degré fini sur $\mathbb{Q}$.

Definition 1.3. Une extension métacyclique (respectivement métabélienne) du corps de nombres H est une extension normale de H , dont le groupe de Galois est métacyclique (respectivement métabélien).

Soient N une extension métabélienne de degré $\ell^s n'$ sur H , puis G' son groupe de Galois et S le ℓ -sous-groupe de Sylow de G' . Puisque S est distingué dans G' , et à quotient abélien, son corps des invariants K est une extension abélienne de H , dont le groupe de Galois $\text{Gal}(K/H)$ est isomorphe à G'/S .

Faisant choix d'un relèvement T' de $\text{Gal}(K/H)$ dans $\text{Gal}(N/H)$, nous désignons par L son corps des invariants. Lorsque le groupe G' n'est pas abélien, le corps L n'est pas galoisien sur H et possède exactement ℓ^s conjugués distincts. Sa clôture galoisienne est alors le corps $N^{\text{Ker } \chi}$ fixé par le centre $\text{Ker } \chi$ de G' . Le corps $N^{\text{Ker } \chi}$ est une extension métacyclique de H et son sous-corps cyclique maximal $K^{\text{Ker } \chi}$ est appelé arête cyclique de l'extension, par analogie géométrique.

L'ensemble de cette discussion peut se résumer dans le schéma de corps :



Enfin , pour tout entier $t = 1, \dots, s$, le sous-corps N^t de N , fixé par S^{ℓ^t} , est une extension métabélienne de degré $\ell^t n'$ sur H , de groupe de Galois $\text{Gal} (N^t/H) = G'/S^{\ell^t}$.

En particulier , pour tout sous-corps N_0 de N au-dessus de L , il existe un unique sous-corps $N^t \cap N_0$ qui est d'indice ℓ^{s-t} dans N_0 . Nous le notons N_0^t .

2 . RAMIFICATION DANS LES EXTENSIONS METACYCLIQUES .

Nous étudions les diverses possibilités qu'ont les places de H de se ramifier dans N . Nous nous limitons pour cela au cas où N est mé - tacyclique de degré $\ell^s n$ sur H .

§ 1 . Considérons d'abord le cas des places à l'infini .

Proposition 1.3 . Pour toute place réelle p du corps N qui se ramifie dans l'ex - tension métagcyclique N/H , il existe une et une seule place réelle de L au - dessus de p , et $(\ell^s - 1)/2$ places imaginaires , ce qui s'écrit :

$$p = \mathfrak{p} \left(\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_{(\ell^s - 1)/2} \right)^2 .$$

Démonstration :

L'extension N/K qui est cyclique et d'ordre impair est non ramifiée aux places à l'infini . Si donc p est une place réelle de H qui se ramifie dans N/H , elle se ramifie dans la sous-extension cyclique K/H , ce que nous écrivons $p = \left(\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_{n/2} \right)^2$. Cela étant , chacune des places $\mathfrak{p}_i$ se décompose dans N/K et les groupes de décompositions res - pectifs des places de N au-dessus d'un même $\mathfrak{P}_i$ sont des groupes d'or - dre 2 , conjugués de l'un d'entre eux . En particulier nous pouvons écri - re $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{p}_{i0} \dots \mathfrak{p}_{i(\ell^s - 1)}$ dans N , en faisant en sorte que L soit con - tenu dans le corps de décomposition N_0 des $\mathfrak{p}_{i0}$, et dans celui-là seule - ment . Il est alors clair que la restriction commune $\mathfrak{p}$ des $\mathfrak{p}_{i0}$ à L est l'unique place réelle de L au-dessus de p .

Corollaire . Le rang $r(L)$ du groupe des unités du corps L , et celui $r(N)$ du groupe des unités de N , sont donnés par les relations :

$$1 + r(L) = \sum_p \left(1 + \frac{\ell^s - 1}{e_p} \right) \quad \text{et} \quad 1 + r(N) = \sum_p \ell^s \frac{n}{e_p} ;$$

les sommations étant étendues aux places à l'infini de H , et l'indice e_p étant l'indice de ramification de la place p dans l'extension K/H .

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le théorème de Dirichlet.

§ 2. Traitons maintenant le cas des idéaux (cf. [Po]).

Proposition 1.4. Tout idéal premier p du corps H , étranger à ℓ , et qui se ramifie dans l'extension K/H , se décompose complètement dans N/K .

Démonstration :

Il suffit évidemment de vérifier que p est décomposé dans la sous-extension de degré ℓ de N/K ; de sorte que nous pouvons supposer que s est égal à 1, puis montrer que p n'est ni inerte ni ramifié dans N/K .

Ecrivons que les groupes de ramification $(G_i)_{i \geq 1}$ de p dans N/H s'écrivent comme produits semi-directs des groupes de ramification $(S_i)_{i \geq -1}$ relatifs à N/K et $(T_i)_{i \geq -1}$ relatifs à K/H .

Si p est inerte dans N/K , nous avons $S_{-1} = S$ et $S_0 = 1$, et le groupe d'inertie $G_0 \simeq T_0$ n'est pas distingué dans le groupe de décomposition; ce qui est absurde.

Si p est ramifié dans N/K , nous avons $S_0 = S_{-1} = S$ et $S_1 = 1$ par un argument de modération. Ecrivant que le groupe de ramification $G_1 \simeq T_1$ est distingué dans le groupe d'inertie, nous obtenons $T_1 = 1$, puis une contradiction en remarquant que le quotient G_0/G_1 serait métacyclique, contrairement à [CL] (Ch.IV, § 2 prop.7, cor.1).

Corollaire. Lorsque l'extension N/K est modérément ramifiée, son discriminant $\mathfrak{d}_{N/K}$ est la puissance $(\ell-1)^{\text{ième}}$ d'un idéal $\mathfrak{f}$ étendu de H .

Démonstration :

Soit $\mathfrak{P}$ un idéal de A_K qui se ramifie dans A_N . D'après la proposition, il n'est donc pas ramifié dans l'extension K/H ; ce que nous pouvons écrire $\mathfrak{p}A_K = \mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_g$, en posant $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A_H$. Et chacun des conjugués se ramifie dans A_N , soit $\mathfrak{P}_i A_N = (\mathfrak{P}_{i1} \dots \mathfrak{P}_{i\ell})^{\ell^e}$. D'où la p -partie de la différentielle $\mathfrak{D}_{N/K} = \prod \mathfrak{P}_{ij}^{\ell^e - 1}$, puis, en prenant la norme,

celle du discriminant $\mathfrak{d}_{N/K} = N_{N/K}(\mathfrak{D}_{N/K}) = (\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_q)^{\ell^f(\ell^e-1)} = \mathfrak{p}^{\ell^f(\ell^e-1)} A_K$.

Ce résultat est en défaut en ramification sauvage.

Proposition 1.5. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de H , étranger à ℓ , et $\mathfrak{P}_0, \dots, \mathfrak{P}_q$ les idéaux premiers de L au-dessus de $\mathfrak{p}$. Alors $\mathfrak{p}$ se ramifie dans K/H si et seulement si l'un des $\mathfrak{P}_i$ se ramifie dans N/L . Lorsque c'est le cas, un seul des $\mathfrak{P}_i$, disons $\mathfrak{P}_0$, est effectivement ramifié dans N/L et $\mathfrak{p}$ s'écrit dans A_L : $\mathfrak{p} A_L = \mathfrak{P}_0 (\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_q)^e$.

Démonstration :

Il est clair que $\mathfrak{p}$ est ramifié dans K/H , dès que l'un des $\mathfrak{P}_i$ l'est dans N/L . Réciproquement, si $\mathfrak{p}$ se ramifie dans K/H , la proposition 1.4 nous montre qu'il se décompose complètement dans l'extension N/K . Il nous suffit alors d'appliquer, mutatis mutandi, la démonstration de la proposition 1.3, pour obtenir le résultat attendu.

Corollaire. Lorsque l'extension N/K est modérément ramifiée, le discriminant $\mathfrak{d}_{L/H}$ est donné par la relation :

$$\mathfrak{d}_{L/H} = \ell^{(\ell-1)} \mathfrak{d}_{K/H}^{(\ell^s-1)/n}.$$

Démonstration :

La proposition nous donne $\mathfrak{d}_{K/H} = N_{L/H}(\mathfrak{d}_{N/L})$ et la formule s'obtient en calculant de deux façons le discriminant de N/H .

Il vient en effet :

$$\text{- d'une part } \mathfrak{d}_{N/H} = \mathfrak{d}_{K/H}^{\ell^s} N_{K/H}(\mathfrak{d}_{N/K}) = \mathfrak{d}_{K/H}^{\ell^s} \ell^{(\ell-1)n},$$

$$\text{- d'autre part } \mathfrak{d}_{N/H} = \mathfrak{d}_{L/H}^n N_{L/H}(\mathfrak{d}_{N/L}) = \mathfrak{d}_{N/L}^n \mathfrak{d}_{K/H};$$

d'où l'identité annoncée.

CHAPITRE II

STRUCTURE DES G -MODULES NOETHERIENS

Soient G un groupe fini, et K un corps de nombres algébriques. L'algèbre $K[G]$ des combinaisons linéaires d'éléments de G à coefficients dans K est une algèbre semi-simple, produit direct d'un nombre fini de K -algèbres simples A_i :

$$K[G] \simeq \prod_{i \in I} A_i .$$

Par ailleurs, tout caractère χ du groupe G se prolonge de façon unique en un morphisme de K -espaces vectoriels de l'algèbre $K[G]$ sur le corps circulaire $K[\chi]$. Et si χ est le caractère d'une représentation absolument irréductible, il existe une unique algèbre simple A_i , notée A_χ , pour laquelle l'image $\chi(A_i)$ est non nulle ; deux caractères χ et χ' correspondant à un même facteur A_i si et seulement s'ils sont K -conjugués .

En particulier ([Se], cor. 1, th. 2.9), lorsque K est le corps des nombres rationnels, le nombre de facteurs simples de l'algèbre $K[G]$ est égal au nombre de classes de conjugaison de sous-groupes cycliques de G .

Précisons en premier lieu ces points, dans le cas où le groupe G est un groupe métabélien .

1. REPRESENTATIONS ABSOLUMENT IRREDUCTIBLES D'UN GROUPE METABELIEN.

Désignons donc par G' un groupe métabélien, de centre R , et examinons le cas où R est un facteur direct de G' . Notons G le sous-groupe métacyclique maximal de G' , qui est isomorphe à G'/R .

§ 1. Le groupe G' s'écrivant alors comme composé direct des sous-groupes normaux R et G , l'algèbre engendrée $K[G']$ sur un corps de nombres K , s'identifie au produit tensoriel :

$$K[G'] = K[R] \otimes_K K[G] .$$

En particulier, les représentations de G' s'obtiennent donc à partir des représentations respectives de R et de G . Le même argument s'applique bien entendu à la décomposition en facteurs cycliques du groupe abélien R , de sorte que nous avons :

$$K[R] = \bigotimes_{j \in J} K[R_j] , \text{ avec les notations du chapitre I .}$$

L'algèbre $K[R]$ du groupe abélien R sur le corps K est un anneau artinien commutatif sans radical, composé direct d'un nombre fini de corps circulaires sur K . Par exemple, lorsque R est un groupe cyclique d'ordre m , l'algèbre $\mathbb{Q}[R]$ est somme directe des corps cyclotomiques $\mathbb{Q}^{(q)}$ pour $q|m$:

$$\mathbb{Q}[R] = \bigoplus_{q|m} \mathbb{Q}^{(q)} .$$

Il suit que les représentations de G' peuvent s'obtenir, à partir de celles de G , par extensions des scalaires ; ainsi, dans l'exemple proposé, si L est le module d'une représentation de G , le module de la représentation induite est :

$$\begin{aligned} L' &= \mathbb{Q}[G'] \otimes_{\mathbb{Q}[G]} L = \mathbb{Q}[R] \otimes_{\mathbb{Q}[G]} L = \bigoplus_{q|m} \left(\mathbb{Q}^{(q)} \otimes_{\mathbb{Q}[G]} L \right) = \\ &= \bigoplus_{q|m} \left(\mathbb{Q}^{(q)}[G] \otimes_{\mathbb{Q}[G]} L \right) = \bigoplus_{q|m} L^{(q)} . \end{aligned}$$

Il va sans dire que la représentation L peut être irréductible sans que les induites $L^{(q)}$ le soient. C'est ainsi que si T et R sont cycliques de même ordre premier q , nous avons : $\mathbb{Q}[T] \simeq \mathbb{Q}[R] \simeq \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}^{(q)}$;

tandis que $\mathbb{Q}^{(q)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{(q)}$ est somme directe de $(q-1)$ exemplaires de $\mathbb{Q}^{(q)}$.

Ce cas ne se produit pas lorsque le corps des scalaires contient les racines $(\ell-1)^{\text{ième}}$ de l'unité, l'algèbre $K[R]$ étant alors somme directe d'exemplaires de K .

§ 2. D'après les remarques qui précèdent, la détermination des représentations absolument irréductibles du groupe G' se ramène à la recherche de celles du sous-groupe G . Rappelons en quelques mots comment construire ces dernières ([Se], § 2) :

Proposition II.1. Notons ζ une racine primitive ℓ^s -ième de l'unité, et pour $i = 1, \dots, (\ell^s - 1)$, soient L_i la représentation du sous-groupe normal S définie par $\ell_i(\sigma) = \zeta^i$, puis $S_i = \overline{\mathbb{Q}}[G] \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}[S]} L_i$ la représentation induite dans G . Les représentations $(S_i)_{i=1, \dots, (\ell^s - 1)}$ sont absolument irréductibles et deux d'entre elles S_i et $S_{i'}$ sont isomorphes si et seulement si les classes de i et i' dans $\mathbb{Z}/\ell^s \mathbb{Z}$ sont dans une même orbite pour l'action $x \mapsto x^{\rho}$.

Démonstration :

Les classes à gauche $(\tau^j S)_{j=1, \dots, n}$ étant deux à deux disjointes, le module de la représentation induite s_i s'écrit comme somme directe $S_i = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \tau^j \otimes L_i$, de sorte que la représentation s_i peut être définie par les deux relations :

$$\sigma \mapsto s_i(\sigma) = \begin{bmatrix} \tau^i & & & 0 \\ & \tau^{i\rho} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tau^{i\rho^{n-1}} \end{bmatrix} \quad \tau \mapsto s_i(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

Pour établir que les s_i sont irréductibles, il nous suffit, d'après le critère de Mackey, de vérifier que les $(s_i(\tau^j \sigma \tau^{-j}))_{j=1, \dots, n}$ sont tous distincts. Cette dernière condition s'écrit encore $\zeta^i \neq \zeta^{i\rho^j}$, pour $j = 1, \dots, (n-1)$, et elle est vérifiée compte-tenu des hypothèses sur G . En effet, toute relation $i(\rho^j - 1) \equiv 0 \pmod{\ell^s}$ entraîne $\rho^j \equiv 1 \pmod{\ell}$, d'où $j \equiv 0 \pmod{n}$.

Enfin, deux représentations s_i et $s_{i'}$ sont inéquivalentes si et seulement si $s_i(\sigma)$ est distinct des $s_{i'}(\tau^j \sigma \tau^{-j})$, autrement dit, lorsque la classe de i dans $\mathbb{Z}/\ell^s \mathbb{Z}$ n'est pas dans l'orbite de celle de i' pour l'action

Theoreme II.1. Un groupe métacyclique G d'ordre $n\ell^s$ est un groupe monomial dont les représentations absolument irréductibles sont, à isomorphisme près :

(i) Les n représentations t_j , de degré 1, déduites par inflation de celles de $G/S \simeq T$.

(ii) $\frac{\ell^s - 1}{n}$ représentations inéquivalentes parmi les représentations s_i , de degré n , induites par celles du sous-groupe dérivé S .

Démonstration :

Parmi les représentations absolument irréductibles, nous avons d'abord les représentations de degré 1. Nous savons qu'elles sont induites par les représentations du groupe G abélianisé, c'est-à-dire du quotient G/S , isomorphe à T ; elles sont au nombre de n .

D'autre part, d'après la proposition II.1, il existe exactement $\frac{\ell^s - 1}{n}$ représentations absolument irréductibles, de degré n et inéquivalentes, parmi les s_i .

L'équation aux dimensions $\sum \dim^2 = n + \frac{\ell^s - 1}{n} n^2 = \ell^s n$ nous assure que ce sont là les seules, à isomorphisme près.

§ 3. Les facteurs simples de l'algèbre $\mathbb{Q}[G]$ associés aux caractères de degré 1 sont les corps cyclotomiques $\mathbb{Q}^{(d)}$, pour $d|n$; tandis que les algèbres simples associées aux caractères de degré n sont des algèbres de matrices sur leur centre.

Plus précisément, pour tout $t = 1, \dots, s$, introduisons l'élément $v_t = 1 + \sigma^{\ell^{t-1}} + \dots + \sigma^{\ell^{t-1}(\ell-1)}$ de l'algèbre $\mathbb{Z}[G]$, et notons, comme plus haut, G_t le quotient G/G^{ℓ^t} . Nous avons alors la décomposition directe :

$$\mathbb{Q}[G] = \frac{v_s}{\ell} \mathbb{Q}[G] \oplus \left(1 - \frac{v_s}{\ell} \right) \mathbb{Q}[G],$$

dans laquelle le premier terme $\frac{v_s}{\ell} \mathbb{Q}[G]$ s'identifie à l'algèbre $\mathbb{Q}[G_{s-1}]$, et le second au quotient $\mathbb{Q}[G]/v_s \mathbb{Q}[G]$, isomorphe à l'algèbre croisée $\mathbb{Q}[\zeta, T]$ engendrée sur le corps cyclotomique $\mathbb{Q}^{(\ell^s)}$ par le groupe T , avec la relation $\tau \zeta = \zeta^{\chi(\tau)} \tau$.

L'algèbre $\mathbb{Q}[\zeta, T]$ est une algèbre centrale simple qui admet pour centre le corps $\mathbb{Q}_0^{(\ell^s)}$ des invariants de l'unique sous-groupe d'ordre n du groupe de Galois $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{(\ell^s)}/\mathbb{Q})$. Autrement dit la décomposi -

tion précédente s'écrit :

$$\mathbb{Q}[G] = \mathbb{Q}[G_{s-1}] \oplus M_n(\mathbb{Q}_o^{(\ell^s)}) ;$$

d'où , par itération du dévissage :

Proposition II.2. L'algèbre $\mathbb{Q}[G]$ d'un groupe métacyclique sur le corps des nombres rationnels admet la décomposition :

$$\mathbb{Q}[G] = \left(\bigoplus_{q|n} \mathbb{Q}^{(q)} \right) \oplus \left(\bigoplus_{t=1}^s M_n(\mathbb{Q}_o^{(\ell^t)}) \right) .$$

Par extension des scalaires , nous en déduisons sans peine la structure de l'algèbre $\mathbb{Q}[G']$ du groupe métabélien $G' = G \times R$, puis celle de l'algèbre $\mathbb{Q}_\ell[G']$.

Corollaire . Soit G' un groupe métabélien d'ordre $\ell^s n'$, composé direct d'un groupe métacyclique G d'ordre $\ell^s n$ et d'un nombre fini de groupes cycliques R_j d'ordres respectifs n_j . Les facteurs simples de l'algèbre $\mathbb{Q}[G']$ sont alors des algèbres de matrices sur leur centre :

$$\mathbb{Q}[G'] = \bigoplus_{j \in J} \bigoplus_{q_j | n_j} \left[\bigoplus_{q|n} \left(\mathbb{Q}^{(q_j)} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^{(q)} \right) \oplus \left(\bigoplus_{t=1}^s M_n(\mathbb{Q}_o^{(q_j \ell^t)}) \right) \right] ,$$

où $\mathbb{Q}_o^{(q_j \ell^t)}$ désigne le composé direct du corps cyclotomique $\mathbb{Q}^{(q_j)}$ et du corps $\mathbb{Q}_o^{(\ell^t)}$.

Il suit en particulier : $\mathbb{Q}_\ell[G'] \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{n'} \mathbb{Q}_\ell \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n'/n} \bigoplus_{t=1}^s M_n((\mathbb{Q}_\ell)_o^{(\ell^t)}) \right) .$

2. DEVISSAGE DES MODULES NOETHERIENS SUR L'ALGEBRE $\mathbb{Z}[G]$.

Considérons maintenant un groupe abélien M , de type fini , sur lequel opère un groupe métacyclique G . Le groupe M est alors muni canoniquement d'une structure de module à gauche sur l'algèbre $\mathbb{Z}[G]$. Nous nous proposons ici de décrire cette structure .

§ 1. Rappelons que pour tout entier $t \leq s$, nous avons convenu de noter $A^{(\ell^t)}$ l'anneau des entiers du corps cyclotomique $\mathbb{Q}^{(\ell^t)}$, et $A_0^{(\ell^t)}$ celui de son unique sous-corps $\mathbb{Q}_0^{(\ell^t)}$ d'indice n .

Etant donné un $\mathbb{Z}[G]$ -module noëthérien M , les deux opérateurs $\nu_s = 1 + \sigma^{\ell^{s-1}} + \dots + \sigma^{(\ell-1)\ell^{s-1}}$ et $\delta_s = 1 - \sigma^{\ell^{s-1}}$ conduisent l'un et l'autre à un dévissage de M ; le dernier , à partir de la suite exacte courte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \delta_s & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/\text{Ker } \delta_s \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \uparrow \\ 0 & \longleftarrow & \text{Im } \nu_s & \longleftarrow & M & \longleftarrow & \text{Ker } \nu_s \longleftarrow 0 \end{array}$$

le premier par la suite exacte :

Dans l'un et l'autre cas , nous obtenons d'une part un module relatif , i.e. annulé par ν_s , et d'autre part un module fixé par $\sigma^{\ell^{s-1}}$, à partir duquel nous pouvons itérer le dévissage à l'ordre $(s-1)$. Les deux procédés ne sont pas équivalents, puisque les modules $M/\text{Ker } \delta_s$ et $\text{Ker } \nu_s$ ne sont pas en général isomorphes comme nous le montrerons .

Cependant :

Proposition II.3. Soit M un $\mathbb{Z}[G]$ -module de type fini et sans $\mathbb{Z}$ -torsion.

Alors le sous-module $\text{Ker } \nu_s$ est un $A^{(\ell^s)}$ -module noëthérien et sans torsion , isomorphe au quotient de M par son sous-module $\text{Ker } \delta_s$ fixé par $\sigma^{\ell^{s-1}}$.

Démonstration :

Puisque M est de type fini et sans $\mathbb{Z}$ -torsion , les $\mathbb{Z}[G]$ -modules $\text{Ker } \nu_s$ et $M/\text{Ker } \delta_s$ sont deux $\mathbb{Z}[S]$ -modules de type fini , sans $\mathbb{Z}$ -torsion et annulés par ν_s . Comme l'algèbre quotient $\mathbb{Z}[S] / \nu_s \mathbb{Z}[S]$ s'identifie canoniquement à l'anneau de Dedekind $A^{(\ell^s)}$, ce sont donc naturellement deux $A^{(\ell^s)}$ -modules noëthériens et sans torsion .

Remarquons maintenant que $\text{Ker } \nu_s$ s'injecte dans $M/\text{Ker } \delta_s$, puisque pour tout m de M l'inclusion $m \in \text{Ker } \delta_s \cap \text{Ker } \nu_s$ entraîne $\ell m = \nu_s m = 0$ donc $m = 0$; et plus précisément qu'il est d'indice fini, ℓ -primaire dans $M/\text{Ker } \delta_s$, en vertu de la congruence $\delta_s^{(\ell-1)\ell^{s-1}} - \nu_s \in \ell \mathbb{Z}[S]$. Comme $\ell A^{(\ell^s)}$ est la puissance $(\ell-1)\ell^{s-1}$ -ième de l'idéal premier principal $(1-\zeta)A^{(\ell^s)}$, il suit que $\text{Ker } \nu_s$ et $M/\text{Ker } \delta_s$ ont même invariant dans le groupe des classes de $A^{(\ell^s)}$; autrement dit qu'ils sont bien $A^{(\ell^s)}$ -isomorphes.

§ 2. Concentrons donc notre attention sur les $\mathbb{Z}[G]$ -modules annulés par ν_s , et rappelons pour cela une interprétation de l'algèbre quotient $\mathbb{Z}[G]/\nu_s \mathbb{Z}[G]$:

Définition . Par $\Lambda^s = \mathbb{Z}[\zeta \circ T]$ nous entendrons le produit croisé de l'anneau cyclotomique $A^{(\ell^s)}$ et du groupe T , identifié à $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{(\ell^s)}/\mathbb{Q}_0^{(\ell^s)})$ par la relation $\zeta^\tau = \zeta^{\chi(\tau)}$; autrement dit l'algèbre des combinaisons linéaires $\sum_{\tau \in T} a_\tau \tau$ à coefficients dans $A^{(\ell^s)}$, avec les relations $\tau a = a^\tau \tau$, pour tout a de $A^{(\ell^s)}$ et tout τ de T .

Les propriétés des algèbres Λ ont été étudiées par [Le] dans le cas diédral, puis plus généralement, en ramification modérée, par M.I. Rosen [Ro]. Donnons en une démonstration élémentaire :

Théoreme II.2. L'algèbre Λ^s est un ordre héréditaire, de centre $A_0^{(\ell^s)}$, et de sous-algèbre commutative maximale $A^{(\ell^s)}$.

(i) Les idéaux de Λ^s s'écrivent comme sommes directes d'idéaux T -invariants de $A^{(\ell^s)}$.

(ii) En particulier, si $h_0^{(s)}$ désigne le nombre de classes d'idéaux de l'anneau $A_0^{(\ell^s)}$, il existe exactement, à isomorphisme près, $nh_0^{(s)}$ modules sur l'algèbre Λ^s qui sont indécomposables, de type fini et sans $\mathbb{Z}$ -torsion.

Démonstration :

Nous avons vu que l'algèbre croisée $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^s$ est une $\mathbb{Q}_0^{(\ell^s)}$ -algèbre simple centrale, contenant $\mathbb{Q}^{(\ell^s)}$ comme sous-corps commutatif maximal. Par restriction des scalaires, il suit que Λ^s est un ordre de centre $A_0^{(\ell^s)}$, de sous-algèbre commutative maximale $A^{(\ell^s)}$.

Cela étant , pour établir que Λ^S est héréditaire , il nous suffit de vérifier que tout Λ^S -module qui est $A_O^{(\ell^S)}$ -projectif , est Λ^S projectif . Or , si M est un tel module , $M_\Lambda = \Lambda^S \otimes_{A_O^{(\ell^S)}} M$ est un Λ^S -module projectif et notre assertion sera acquise si nous montrons que M en est facteur direct . Et ce dernier point résulte de ce que la suite exacte canonique :

$$0 \longrightarrow \text{Ker } g \longrightarrow M_\Lambda \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0 , \text{ avec } g(\lambda \otimes m) = \lambda m$$

est scindée par $f | m \mapsto \sum_{\tau \in T} \tau^{-1} \otimes u \tau m$,

où u est l'élément $\tau / (\tau + \tau^\rho + \dots + \tau^{\rho^{n-1}})$.

(i) Pour montrer que tout Λ^S -module projectif est somme directe d'idéaux T -invariants de l'anneau cyclotomique $A^{(\ell^S)}$, remarquons en premier lieu que , puisque $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^S$ est une $\mathbb{Q}_O^{(\ell^S)}$ algèbre simple centrale, tous les $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^S$ -modules indécomposables sont isomorphes à l'un quelconque d'entre eux , donc en particulier à $\mathbb{Q}^{(\ell^S)}$. Par conséquent , si M est un Λ^S -module projectif de type fini , le tensorisé $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est isomorphe , en tant que $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^S$ -module , à une somme directe d'exemplaires de $\mathbb{Q}^{(\ell^S)}$, soit :

$$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M = \bigoplus_{j=1}^d \mathbb{Q}^{(\ell^S)} a_j .$$

Pour tout $i = 0 , \dots , d$, définissons un Λ^S -module M_i par $M_i = M \cap \left(\bigoplus_{j=1}^i \mathbb{Q}^{(\ell^S)} a_j \right)$. Les quotients M_{i+1}/M_i ($i = 0, \dots, d-1$) sont autant de $A^{(\ell^S)}$ -modules projectifs de rang 1 , stables pour l'action de T . Autrement dit , ils s'identifient à des idéaux T -invariants de l'anneau $A^{(\ell^S)}$. Or , puisque Λ^S est héréditaire , nous obtenons $M \simeq \bigoplus_{i=0}^{d-1} M_{i+1}/M_i$ qui est notre seconde assertion .

(ii) Enfin, deux idéaux T -invariants A et B de l'anneau $A^{(\ell^S)}$ sont Λ^S -isomorphes si et seulement s'il existe un $A^{(\ell^S)}$ -isomorphisme φ , commutant aux éléments de T , qui envoie A sur B . Or un tel isomorphisme ne peut qu'être qu'une homothétie de rapport invariant par T , i.e. une $A_O^{(\ell^S)}$ -équivalence . Notre dernière assertion résulte donc de ce que tout idéal T -invariant de l'anneau $A^{(\ell^S)}$ s'écrit de façon unique $A = a \mathcal{L}^i$, où a est

un idéal étendu de $A_{\mathcal{O}}^{(\ell^t)}$, $\mathcal{L}$ l'idéal maximal de $A^{(\ell^s)}$ au-dessus de ℓ et i un entier de $[0, n-1]$.

§ 3. Il résulte du théorème que tout Λ^s -module projectif de type fini M , s'écrit comme somme directe finie : $M \simeq \bigoplus_{i,j} a_{ij} \mathcal{L}^i$.

Les invariants attachés à M se lisent directement sur cette décomposition (cf. [Ro]) :

Theoreme II.3. Tout Λ^s -module projectif de type fini M admet une décomposition en somme directe de modules indécomposables de la forme :

$$M \simeq \bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{j=1}^{q_i} a_{ij} \mathcal{L}^i.$$

Le module M est alors caractérisé à isomorphisme près par les n indices q_i ($i = 1, \dots, (n-1)$), et par la classe de l'idéal $\prod_{i,j} a_{ij}$ dans l'anneau de Dedekind $A_{\mathcal{O}}^{(\ell^s)}$.

Démonstration :

Considérons le localisé $\mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} M$ du module M . Nous obtenons la factorisation $\mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} M = \bigoplus_{i=1}^n \bigoplus_{j=1}^{q_i} \mathfrak{L}^i$ et l'invariance des indices q_i par isomorphisme résulte de l'unicité d'une telle décomposition sous les hypothèses du théorème de Krull-Schmidt. Remarquons enfin que la classe de l'idéal $\prod_{i,j} a_{ij}$ est un invariant pour la $A_{\mathcal{O}}^{(\ell^s)}$ -structure induite du module M ; et réciproquement que deux modules M et N ayant mêmes invariants sont Λ^s -isomorphes : il nous suffit en effet de raisonner par récurrence à partir de l'isomorphisme $a \mathcal{L}^i \oplus b \mathcal{L}^j \simeq a b \mathcal{L}^i \oplus \mathcal{L}^j$, qui découle immédiatement de l'identité $a \oplus b \simeq a b \oplus A_{\mathcal{O}}^{(\ell^s)}$ dans l'anneau de Dedekind $A_{\mathcal{O}}^{(\ell^s)}$ (cf. [Bo] ch. 7 § 2).

Signalons, avant d'étudier de façon plus précise la structure locale de l'algèbre Λ^s , que l'invariant global associé à Λ^s considérée comme module sur elle-même, est évidemment la classe principale, puis que Λ^s est librement engendré sur $A_{\mathcal{O}}^{(\ell^s)}$ par les éléments $\tau \zeta^k$, pour $(\tau, k) \in T \times \{0, 1, \dots, (n-1)\}$.

3. STRUCTURE DES MODULES NOETHERIENS SUR L'ALGÈBRE ℓ -ADIQUE $\mathbb{Z}_\ell[\zeta \circ T]$.

Pour étudier la nature des indices q_i intervenant dans la décomposition d'un Λ^S -module projectif M , introduisons l'algèbre ℓ -adique $\mathfrak{R}^S = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda^S = \mathbb{Z}_\ell[\zeta \circ T]$.

§ 1. Précisons en premier lieu la structure de $\mathbb{Z}_\ell[G']$:

Proposition II.4. Le groupe T' étant un groupe abélien d'exposant divisant $(\ell-1)$, ses représentations sont réalisables sur le corps $\mathbb{Q}_\ell$ des nombres ℓ -adiques. Plus précisément :

(i) A tout caractère ℓ -adique ψ du groupe T' , correspond un idempotent e_ψ dans l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[T']$, défini par $e_\psi = \frac{1}{n'} \sum_{\tau \in T'} \psi(\tau^{-1}) \tau$, et caractérisé par l'identité $\tau e_\psi = \psi(\tau) e_\psi$.

(ii) Les éléments e_ψ associés aux caractères irréductibles de T' forment un système complet d'idempotents orthogonaux de l'algèbre semi-locale $\mathbb{Z}_\ell[T']$.

Démonstration :

L'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ contenant le groupe $\mu_{\ell-1}$ des racines $(\ell-1)$ èmes de l'unité, les représentations de T' sont effectivement réalisables sur $\mathbb{Q}_\ell$. Cela étant, les relations : $e_\psi = \frac{1}{n'} \sum_{\tau \in T'} \psi(\tau^{-1}) \tau$, définissent des éléments de $\mathbb{Z}_\ell[T']$, et il est bien connu (cf. [Or]) qu'ils constituent un système d'idempotents liés par les relations : $e_\psi, e_{\psi'} = \langle \psi, \psi' \rangle e_\psi$.

Proposition II.5. Les idempotents centraux $e_\varphi = \frac{1}{|R|} \sum_{\tau \in R} \varphi(\tau^{-1}) \tau$ construits sur les caractères irréductibles φ du centre de G' , déterminent un isomorphisme d'algèbre : $\mathbb{Z}_\ell[G'] \simeq \bigoplus_{\varphi \in R^*} e_\varphi \mathbb{Z}_\ell[G']$.

Plus généralement, les homothéties à droite associées aux idempotents e_ψ sont des projecteurs orthogonaux pour la structure de $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -module à gauche de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G']$:

(i) En particulier l'algèbre $Z_\ell[G']$ s'écrit comme somme directe $Z_\ell[G'] = \bigoplus_{\psi \in T'^*} Z_\ell[S] e_\psi$.

(ii) De plus, si χ désigne le caractère de l'action de T' sur S , et δ l'élément $(1-\sigma)$, nous avons la congruence :

$$e_{\chi\psi} \delta \equiv \delta e_\psi \pmod{\delta^2 Z_\ell[G']}.$$

Démonstration :

La première assertion est immédiate, qui conduit à l'isomorphisme de $Z_\ell[G']$ -modules : $x \mapsto \sum_{\psi \text{ irréductibles}} x e_\psi$, de $Z_\ell[G']$ sur la somme directe $\bigoplus_{\psi \in T'^*} Z_\ell[S] e_\psi$.

Pour établir la congruence annoncée, introduisons une section $\bar{\chi}$ de χ modulo ℓ^S , à valeurs dans $\mathbb{N}$. Nous avons l'identité :

$$\begin{aligned} e_{\chi\psi} \delta &= \frac{1}{n'} \sum_{\tau \in T'} \chi(\tau^{-1}) \psi(\tau^{-1}) \tau(1-\sigma) = \\ &= \frac{1}{n'} \sum_{\tau \in T'} \chi(\tau^{-1}) \psi(\tau^{-1}) (1 - \sigma^{\bar{\chi}(\tau)}) \tau = \\ &= \frac{1-\sigma}{n'} \sum_{\tau \in T'} \psi(\tau^{-1}) \tau \frac{1 + \sigma + \dots + \sigma^{\bar{\chi}(\tau)-1}}{\chi(\tau)}. \end{aligned}$$

D'où la congruence :

$$e_{\chi\psi} \delta \equiv \frac{\delta}{n'} \sum_{\tau \in T'} \psi(\tau^{-1}) \tau \frac{\bar{\chi}(\tau)}{\chi(\tau)} \pmod{\delta^2 Z_\ell[G']},$$

de sorte que notre proposition sera démontrée avec l'inclusion $\ell^S \delta \in \delta^2 Z_\ell[S]$.

Or celle-ci résulte du lemme :

Lemme II.6. Pour tout entier $t = 1, \dots, s$, notons v_t pour $v(\sigma^{\ell^{t-1}}) = 1 + \sigma^{\ell^{t-1}} + \dots + \sigma^{(\ell-1)\ell^{t-1}}$ et δ_t pour $\delta(\sigma^{\ell^{t-1}}) = 1 - \sigma^{\ell^{t-1}}$. Il existe un polynôme P de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$, qui satisfait aux relations suivantes : $\delta_t^{(\ell-1)} = v_t - \ell(1 + \delta_t P_t(\sigma))$, avec $P_t(\sigma) = P(\sigma^{\ell^{t-1}})$. L'élément $(1 + \delta_t P_t(\sigma))$ est inversible dans l'algèbre $Z_\ell[S]$.

Démonstrations :

Dans l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$, nous avons l'identité : $(1 - X)^{\ell-1} = 1 + X + \dots + X^{\ell-1} - \ell(1 + (1 - X)P(X))$, pour un P convenable de $\mathbb{Z}[X]$. Par substitution, nous en déduisons les relations annoncées : $\delta_t^{(\ell-1)} = v_t - \ell(1 + \delta_t P_t(\sigma))$. En particulier,

nous avons $\delta_t^\ell \equiv \delta_{t+1} \pmod{\ell \mathbb{Z}_\ell[S]}$, puis, par une récurrence immédiate, $\delta_t^{\ell^{s-t+1}} \equiv 0 \pmod{\ell \mathbb{Z}_\ell[S]}$; ce qui nous prouve que l'élément $1 + \delta_t P_t(\sigma)$ somme d'un inversible et d'un nilpotent topologique de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[S]$, en est un élément inversible.

Achevons alors la démonstration de la proposition. Pour tout $t = 1, \dots, s$, nous pouvons écrire $\ell = v_t + (\ell - v_t) = v_t - \delta_t Q_t(\sigma)$ pour un élément $Q_t(\sigma) = \ell P_t(\sigma) - \delta_t^{\ell-2}$. Il vient donc :

$\ell \delta_{t-1} = \delta_t (1 - \delta_{t-1} Q_t(\sigma))$, soit $\ell \delta_{t-1} \in \delta_t \mathbb{Z}_\ell[S]$; et par récurrence : $\ell^s \delta \in \ell \delta_s \mathbb{Z}_\ell[S]$. Utilisons maintenant le lemme à l'ordre s . Nous obtenons $\delta_s^\ell \mathbb{Z}_\ell[S] = \ell \delta_s \mathbb{Z}_\ell[S]$, ce qui nous donne : $\ell^s \delta \in \delta_s^\ell \mathbb{Z}_\ell[S]$ et ce dernier idéal de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[S]$ est contenu dans l'idéal primaire $\delta^\ell \mathbb{Z}_\ell[S]$.

§ 2. Le passage au quotient dans la proposition 5 ci-dessus, nous donne immédiatement les facteurs indécomposables de l'algèbre localisée $\mathfrak{R}$:

Proposition II.7. Convenons de conserver la notation χ pour désigner le caractère de l'action du groupe cyclique T sur le groupe S . Alors :

(i) Pour tout caractère irréductible χ^i ($i = 1, \dots, n$) du groupe T , la somme de Gauss ϑ_i , définie par $\vartheta_i = e_{\chi^i}(\zeta) = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi^i(\tau^{-1}) \zeta^{\chi^i(\tau)}$ est un générateur de l'idéal $\mathfrak{A}^i = (1 - \zeta)^i \mathbb{Z}_\ell[\zeta]$.

(ii) En particulier, pour sa structure de $\mathfrak{R}^S$ -module, l'algèbre $\mathfrak{R}^S$ se décompose en somme directe : $\mathfrak{R}^S \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{A}^i = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_\ell[\zeta] \vartheta_i$, où nous avons écrit ϑ pour ϑ_1 .

Démonstration :

Formons des congruences modulo le carré de l'idéal maximal $\mathfrak{A}$ dans l'anneau cyclotomique $\mathfrak{K} = \mathbb{Z}_\ell[\zeta]$. Nous avons $\zeta^k \equiv 1 + k(1 - \zeta) \pmod{\mathfrak{A}^2}$, pour tout entier naturel k ; et par conséquent :

$$\vartheta \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \rho^{-j} \zeta^{\rho^j} \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \rho^{-j} (1 - \rho^j(1 - \zeta)) \equiv (1 - \zeta) \pmod{\mathfrak{A}^2},$$

ce qui établit l'assertion pour ϑ .

Un argument de théorie de Galois nous permet de l'étendre aux ϑ_i . En effet, l'identité : $\tau \vartheta_i = \tau e_{\chi^i}(\zeta) = \chi^i(\tau) e_{\chi^i}(\zeta) = \chi^i(\tau) \vartheta_i$, nous montre que l'élément $\vartheta_i \vartheta^{n-i}$ de l'anneau $\mathfrak{K}$ est fixé par l'unique sous-groupe cyclique d'ordre n de $\text{Gal}(\mathfrak{K}/\mathbb{Z}_\ell)$, donc que la $\mathfrak{A}$ -valuation $v_{\mathfrak{A}}$ de ϑ_i vérifie la congruence $v_{\mathfrak{A}}(\vartheta_i) \equiv i \pmod{n}$. D'où notre assertion, en vertu de l'inégalité immédiate : $0 < v_{\mathfrak{A}}(\vartheta_i) \leq n$ (cf. [La] I, Th. 2.1).

La décomposition en somme directe de l'algèbre $\mathcal{R}^S$ s'obtient immédiatement à partir des n isomorphismes canoniques : $\mathcal{R}^S e_i \simeq \mathcal{R} \otimes_i \chi$.

Corollaire 1 ([Ro]).

L'algèbre croisée $\Lambda^S = \mathbb{Z}_\ell [\zeta, T]$ est isomorphe à la somme directe des idéaux $\mathcal{L}^i$ ($i = 1, \dots, n$).

Corollaire 2 ([Ga]).

Le groupe Λ^{S*} des éléments inversibles de l'algèbre Λ^S , s'identifie au sous-groupe de $GL_n(A_O^{(\ell^S)})$ formé des matrices inversibles de $M_n(A_O^{(\ell^S)})$ dont les coefficients triangulaires supérieurs sont dans l'idéal maximal $\mathcal{L}_O$.

Démonstration :

La décomposition $\Lambda^S = \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{L}^j$ est celle du théorème II.3, compte-tenu du calcul des invariants. Nous en déduisons un antiisomorphisme $\Lambda^{S*} \simeq \text{Aut}_S \Lambda^S \simeq \left(\bigoplus_{i,j} \text{Hom}_\Lambda(\mathcal{L}^i, \mathcal{L}^j) \right)^*$ et il suffit de vérifier que $\text{Hom}_\Lambda(\mathcal{L}^i, \mathcal{L}^j)$ est isomorphe à $A_O^{(\ell^t)}$ si $j \geq i$, et à $\mathcal{L}_O$ sinon.

§ 3. Le théorème II.3 décrit la structure des modules projectifs de type fini sur l'ordre Λ . Sur l'algèbre $\mathcal{R}^S$ il est possible de préciser ce résultat :

Théorème II.4. Tout $\mathcal{R}^S$ -module noëthérien s'écrit de façon essentiellement unique comme somme directe de $\mathcal{R}^S$ -modules monogènes isotypiques et indécomposables $\mathcal{R}^i / \mathcal{R}^{i+k}$, avec $k \in \overline{\mathbb{N}}$.

Démonstration :

L'algèbre $\mathcal{R}^S$ étant un ordre héréditaire, pour tout $\mathcal{R}^S$ -module $\mathfrak{M}$, la suite exacte courte associée au sous-module de $\mathcal{R}$ -torsion :

$$0 \longrightarrow T(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}/T(\mathfrak{M}) \longrightarrow 0,$$

est une suite scindée.

Autrement dit $\mathfrak{M}$ s'écrit comme somme directe $\mathfrak{M} = T(\mathfrak{M}) \oplus \mathfrak{M}/T(\mathfrak{M})$, et, d'après ce qui précède il nous reste à démontrer le théorème lorsque $\mathfrak{M}$ est un module de torsion.

Procédons pour cela par récurrence sur son ordre ℓ^d . Lorsque $\mathfrak{M}$ est d'ordre premier ℓ , il est évidemment indécomposable, de la forme $\mathbb{F}_\ell e_{\chi^i} \simeq \mathfrak{g}^i / \mathfrak{g}^{i+1}$, ainsi que l'affirme le théorème. Supposons donc $d > 1$ et la propriété vérifiée jusqu'à l'ordre ℓ^{d-1} . Le module $\mathfrak{M}$ contient alors un sous-module monogène et isotypique d'ordre maximal : $\mathfrak{R}^s \beta \simeq \mathfrak{g}^j / \mathfrak{g}^{j+k}$; d'après l'hypothèse de récurrence, le quotient $\mathfrak{M} / \mathfrak{R}^s \beta$ est somme directe de modules monogènes isotypiques : $\mathfrak{R}^s \alpha_h \simeq \mathfrak{g}^{i_h} / \mathfrak{g}^{i_h+k_h}$. D'où une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{R}^s \beta \longrightarrow \mathfrak{M} \longrightarrow \bigoplus_h \mathfrak{R}^s \alpha_h \longrightarrow 0.$$

Relevons chaque α_h en un élément γ_h de $\mathfrak{M}$, engendrant un $\mathfrak{R}$ -module isotypique. L'intersection $\mathfrak{R}^s \beta \cap \mathfrak{R}^s \gamma_h$ s'écrit $(1 - \zeta)^{m_h} \mathfrak{R} \beta$ et aussi $(1 - \zeta)^{n_h} \mathfrak{R} \gamma_h$, puisque nous avons pris soin de choisir les γ_h isotypiques; il existe donc un élément inversible η_h de l'anneau cyclotomique $\mathfrak{R}$ satisfaisant à la relation $(1 - \zeta)^{n_h} \gamma_h = \eta_h (1 - \zeta)^{m_h} \beta_h$. Par maximalité de $\mathfrak{R}^s \beta$, nous avons l'inégalité $m_h \geq n_h$, ce qui nous permet de poser $\gamma'_h = \gamma_h - \eta_h (1 - \zeta)^{m_h - n_h} \beta$. Il est alors clair que la somme $\sum_h \mathfrak{R}^s \gamma'_h$ est directe et que l'application $f|_{\alpha_h} \longmapsto \gamma'_h$ détermine une section de la suite exacte.

Nous obtenons donc $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{R}^s \beta \oplus \left(\bigoplus_h \mathfrak{R}^s \gamma'_h \right)$; d'où le théorème, l'unicité de la décomposition à isomorphisme près résultant du théorème de Krull-Schmidt.

Au passage, nous avons démontré un résultat bien connu dans le cas des modules sur un anneau principal :

Corollaire 1. Tout sous-module monogène indécomposable d'ordre maximal d'un $\mathfrak{R}$ -module fini en est facteur direct.

Corollaire 2 (Théorème de la base adaptée).

Etant donné un sous-module $\mathfrak{N}$ d'un $\mathfrak{R}$ -module projectif noethérien $\mathfrak{M}$, il existe une décomposition $\mathfrak{M} = \bigoplus_h \mathfrak{R}^s \alpha_h$ en somme directe de modules indécomposables, et une famille $(k_h)_h$ d'éléments de $\overline{\mathbb{N}}$ tels que le sous-module $\mathfrak{N}$ s'écrive : $\mathfrak{N} = \bigoplus_h (1 - \zeta)^{k_h} \mathfrak{R}^s \alpha_h$.

Démonstration :

Appliquons le théorème au module quotient $\mathfrak{M} / \mathfrak{N}$. Nous obtenons la factorisation $\mathfrak{M} / \mathfrak{N} = \bigoplus_h \mathfrak{R}^s \left(\alpha_h + \mathfrak{N} \right)$, dans laquelle le

facteur $\mathfrak{R}^s (\alpha_h + \mathfrak{N})$ est de la forme $\mathfrak{g}^{i_h} / \mathfrak{g}^{i_h + k_h}$, et l'élément α_h de $\mathfrak{M}$ peut être choisi de telle sorte le module $\mathfrak{R} \alpha_h$ soit isotypique. Il vient sans peine :

$$\mathfrak{M} = \bigoplus_h \mathfrak{R}^s \alpha_h \quad \text{et} \quad \mathfrak{N} = \bigoplus_h (1 - \zeta)^{k_h} \mathfrak{R}^s \alpha_h .$$

4. APPLICATION A LA CLASSIFICATION DES $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -MODULES , LORSQUE G EST METACYCLIQUE D'ORDRE ℓn .

Nous nous proposons d'employer les résultats qui précèdent à classifier les $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules de type fini . Pour des raisons de complexité technique, nous nous limitons ici au cas où l'exposant s dans l'ordre du groupe G est égal à 1 . Il est néanmoins permis de penser que les méthodes de dévissage décrites plus haut , doivent aboutir pour $s > 1$ et conduire à une généralisation des résultats de [Be] .

§ 1 . Considérons pour commencer , un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module $\mathfrak{M}$, de type fini et sans $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion .

Pour déterminer la structure de $\mathfrak{M}$, il nous suffit , en vertu du théorème de Krull-Schmidt de recenser les $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules indécomposables .

Introduisons pour cela le dévissage canonique du module $\mathbb{Z}_\ell[S] e_{\chi^i}$:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell[S] \delta e_{\chi^i} \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell[S] e_{\chi^i} \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z}_\ell \nu e_{\chi^i} \longrightarrow 0 ,$$

et montrons que les trois termes sont indécomposables .

(i) L'image $\mathbb{Z}_\ell \nu e_{\chi^i}$ est évidemment indécomposable , qui est isomorphe au module $\Gamma_i = \mathbb{Z}_\ell e_{\chi^i}$.

(ii) Le noyau $\mathbb{Z}_\ell[S] \delta e_{\chi^i}$ l'est également , qui , en tant que $\mathfrak{R}$ -module , est isomorphe par le théorème II.3 à un idéal T -invariant de l'anneau $\mathfrak{R}$. Plus précisément , nous pouvons vérifier que l'application $R(\sigma) e_{\chi}(\sigma) e_{\chi^i} \longmapsto R(\zeta) \mathfrak{g}^{i+1}$ est un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell[S] \delta e_{\chi^i}$ sur l'idéal $\mathfrak{g}^{i+1}$.

(iii) Le terme $Z_\ell[S] e_{\chi^i}$ enfin, est lui aussi indécomposable, puisque le quotient $Z_\ell[S] e_{\chi^i} / Z_\ell[S] \vee e_{\chi^i}$ est sans Z_ℓ -torsion, contrairement à ce que donnerait toute décomposition non triviale.

Nous avons ainsi obtenu $3n$ modules indécomposables sur l'algèbre $Z_\ell[G]$, qui sont sans Z_ℓ -torsion. Ce sont là essentiellement les seuls :

Theoreme II.5. Si G est un groupe métacyclique d'ordre ℓn , tout $Z_\ell[G]$ -module de type fini et sans Z_ℓ -torsion s'écrit comme somme directe essentiellement unique d'exemplaires des $3n$ modules indécomposables non isomorphes suivant :

$$\Gamma_i = Z_\ell e_{\chi^i}, \quad \Omega^i \simeq Z_\ell[S] \delta e_{\chi^{i-1}}, \quad \Xi_i = Z_\ell[S] e_{\chi^i},$$

où χ^i ($i = 1, \dots, n$) parcourt le groupe des caractères ℓ -adiques irréductibles de T .

Avant de donner la démonstration du théorème 5, remarquons que dans l'un et l'autre des dévissages d'un $Z_\ell[G]$ -module $\mathfrak{M}$:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{D} \longrightarrow 0,$$

décrits dans la proposition II.3, le module image $\mathfrak{D}$ est projectif sur l'anneau semi-local $Z_\ell[T]$ de sorte que $\mathfrak{M}$ s'identifie, en tant que $Z_\ell[T]$ -module, à la somme directe $\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{D}$.

L'action de $Z_\ell[G]$ sur $\mathfrak{M}$ pouvant alors s'écrire :

$$\alpha(x, y) = (\alpha x + f_\alpha y, \alpha y), \quad \text{pour } \alpha \in Z_\ell[G],$$

il suit que la $Z_\ell[G]$ -structure de $\mathfrak{M}$ est déterminée pour la donnée d'une application linéaire : $f \in \text{Hom}_{Z_\ell[T]}(Z_\ell[G], \text{Hom}_{Z_\ell}(\mathfrak{D}, \mathfrak{N}))$, satisfaisant à la relation $f_{\alpha\beta} = \alpha f_\beta + f_\alpha \beta$, pour tous α, β de $Z_\ell[G]$.

Autrement dit, à isomorphisme près, la $Z_\ell[G]$ -structure de $\mathfrak{M}$ est caractérisée par la classe du cocycle f dans le quotient $\text{Ext}_{Z_\ell[G]}^1(\mathfrak{D}, \mathfrak{N})$.

§ 2. Convenons, pour simplifier, d'écrire Hom pour $\text{Hom}_{Z_\ell[G]}$ et Ext pour $\text{Ext}_{Z_\ell[G]}^1$. Le foncteur Ext étant additif, il nous suffit pour calculer $\text{Ext}(\mathfrak{D}, \mathfrak{N})$, d'explicitier celui-ci lorsque $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{N}$ sont indécomposables.

Remarquons d'abord que nous avons $\text{Ext}(\Xi_i, \mathfrak{R}) = 0$, pour tout $\mathfrak{R}$, puisque le module Ξ_i , facteur direct de $\mathbb{Z}_\ell[G]$, est $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -projectif.

Lemme 11.8. Désignons par $\mathfrak{O}$ l'unique idéal maximal du sous-anneau $\mathfrak{R}_\mathcal{O}$ de l'anneau cyclotomique $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}_\ell[\zeta]$, et par ∂_k^h le symbole de Kronecker. Nous obtenons :

- (i) $\text{Hom}(\Gamma_i, \mathfrak{A}^j) = 0 = \text{Hom}(\mathfrak{A}^j, \Gamma_i)$.
- (ii) $\text{Hom}(\Xi_i, \mathfrak{A}^j) = 0 = \text{Hom}(\mathfrak{A}^i, \mathfrak{A}^j) = \mathfrak{A}_\mathcal{O}^{[(j-i-1+n)/n]}$.
- (iii) $\text{Hom}(\Xi_j, \Gamma_i) = \text{Hom}(\Gamma_j, \Gamma_i) = \partial_i^j \mathbb{F}_\ell$.

Démonstration :

Soit en effet un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -morphisme $f \in \text{Hom}(\Gamma_i, \mathfrak{A}^j)$. Par action de ν , il vient : $0 = \nu f = f\nu = f\ell$, soit $\ell f = 0$ puis $f = 0$. Un résultat analogue vaut pour $f \in \text{Hom}(\mathfrak{A}^j, \Gamma_i)$.

(ii) Supposons maintenant $f \in \text{Hom}(\Xi_i, \mathfrak{A}^j)$. De $f\nu = \nu f = 0$, nous concluons que f se factorise par le quotient $\Xi_i / \nu \Xi_i$, isomorphe à $\mathfrak{A}^i$; et un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -morphisme de $\mathfrak{A}^i$ dans $\mathfrak{A}^j$, n'est autre qu'une homothétie de rapport dans $\mathfrak{R}_\mathcal{O}$.

$$\begin{array}{ccc} \Xi_i & \xrightarrow{f} & \mathfrak{A}^j \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathfrak{A}^i = \Xi_i / \nu \Xi_i & & \end{array}$$

(iii) Enfin, si f appartient à $\text{Hom}(\Xi_j, \Gamma_i)$, l'identité $f\delta = \delta f = 0$ montre que f se factorise par le quotient $\Xi_j / \delta \Xi_j$ isomorphe à Γ_j , ce qui achève la démonstration.

$$\begin{array}{ccc} \Xi_j & \xrightarrow{f} & \Gamma_i \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Gamma_j = \Xi_j / \delta \Xi_j & & \end{array}$$

Lemme 11.9. Pour tout i modulo n , le foncteur Ext satisfait aux identités :
 $\text{Ext}(\Gamma_i, \mathfrak{A}^j) = \partial_{i+1}^j \mathbb{F}_\ell$ et $\text{Ext}(\mathfrak{A}^j, \Gamma_i) = \partial_i^j \mathbb{F}_\ell$.

Démonstration :

De la suite exacte courte de $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules associée à ν :
 $0 \longrightarrow \mathfrak{A}^{i+1} \longrightarrow \Xi_i \longrightarrow \Gamma_i \longrightarrow 0$,
 nous déduisons la suite exacte de groupes :
 $0 \longrightarrow \text{Hom}(\Gamma_i, \mathfrak{A}^j) \longrightarrow \text{Hom}(\Xi_i, \mathfrak{A}^j) \longrightarrow \text{Hom}(\mathfrak{A}^{i+1}, \mathfrak{A}^j) \longrightarrow \text{Ext}(\Gamma_i, \mathfrak{A}^j) \longrightarrow 0$
 qui nous donne immédiatement :

$$\text{Ext}(\Gamma_i, \mathfrak{A}^j) \simeq \text{Hom}(\mathfrak{A}^{i+1} / \mathfrak{A}^j) / \text{Hom}(\mathfrak{A}^i / \mathfrak{A}^j) \simeq \partial_{i+1}^j \mathbb{F}_\ell$$

d'après le lemme précédent.

De façon semblable, de la suite courte :

$$0 \longrightarrow \nu \Gamma_j \longrightarrow \Xi_j \longrightarrow \mathfrak{A}^j \longrightarrow 0,$$

nous déduisons la suite exacte de groupes :

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(\mathfrak{g}^j, \Gamma_i) \longrightarrow \text{Hom}(\Xi_j, \Gamma_i) \xrightarrow{\iota} \text{Hom}(\Gamma_j, \Gamma_i) \longrightarrow \text{Ext}(\mathfrak{g}^j, \Gamma_i) \longrightarrow 0$$

qui donne l'isomorphisme :

$$\text{Ext}(\mathfrak{g}^j, \Gamma_i) \simeq \text{Hom}(\Gamma_j, \Gamma_i) / \iota \text{Hom}(\Gamma_j, \Gamma_i) = \partial_i^j \text{IF}_\ell.$$

§ 3 . Démonstration du théorème :

Considérons un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module indécomposable $\mathfrak{M}$ et dévissons le par action de ν : Posons $\mathfrak{N} = \text{Ker } \nu$ puis $\mathfrak{D} = \text{Im } \nu$; et notons f l'élément de $\text{Ext}(\mathfrak{D}, \mathfrak{N})$ qui définit la structure de $\mathfrak{M}$.

Supposons d'abord $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{D}$ indécomposables , ce qui s'écrit $\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{g}^j$ et $\mathfrak{D} \simeq \Gamma_i$. Le module $\mathfrak{M}$ étant supposé indécomposable , nous avons $j = i+1 \pmod{n}$ d'après le lemme II.8 , et f est uniquement déterminé par la classe $f(1)$ de $\mathfrak{g}^j / \mathfrak{g}^{j+1}$. Celle-ci pouvant être prise (non nulle) arbitrairement par $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -automorphismes de $\mathfrak{N}$, il existe donc , à isomorphisme près, et sous la condition nécessaire $j = i+1 \pmod{n}$, une et une seule extension indécomposable de $\mathfrak{g}^j$ par Γ_i : c'est Ξ_i .

Dans l'hypothèse où $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{D}$ ne seraient pas indécomposables , écrivons les comme sommes directes de modules isotypiques $\mathfrak{N} = \bigoplus_{j=1}^n \mathfrak{N}_j$ et $\mathfrak{D} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{D}_i$. Par additivité du foncteur Ext , nous obtenons

$$\text{Ext}(\mathfrak{D}, \mathfrak{N}) = \bigoplus_{i,j} \text{Ext}(\mathfrak{D}_i, \mathfrak{N}_j) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ext}(\mathfrak{D}_i, \mathfrak{N}_{i+1}) \text{ et } \mathfrak{M} \text{ est décomposé}$$

dès que l'un ou l'autre n'est pas isotypique . Ecrivons donc

$$\mathfrak{N} = \bigoplus_a \mathfrak{g}^j \text{ et } \mathfrak{D} = \bigoplus_b \Gamma_i \text{ comme somme d'indécomposables de même type . Nous}$$

pouvons représenter f matriciellement sous la forme $[f_{ab}]$ avec $f_{ab} \in \text{Ext}(\Gamma_i, \mathfrak{g}^j)$, et il suffit de diagonaliser f par automorphismes de $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{D}$ pour constater que $\mathfrak{M}$ est décomposé avec l'un ou l'autre de $\mathfrak{N}$ ou de $\mathfrak{D}$.

Ainsi, les seuls $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules indécomposables sont bien les $3n$ modules proposés ; ceci achève donc la démonstration, compte-tenu du théorème de Krull-Schmidt .

Scolie .

Pour tout $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module $\mathfrak{M}$, les groupes de cohomologie $H^k(S, \mathfrak{M})$ sont naturellement des $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules sur lesquels S opère trivialement . En particulier :

$$(i) \quad H^1(S, \Xi_i) = 0 \quad , \quad H^2(S, \Xi_i) = 0 \quad . \quad .$$

$$(ii) \quad H^1(S, \mathfrak{g}^i) = \text{IF}_\ell \bar{e}_{\chi_i} \quad , \quad H^2(S, \mathfrak{g}^i) = 0 \quad . \quad .$$

$$(iii) \quad H^1(S, \Gamma_i) = 0 \quad , \quad H^2(S, \Gamma_i) = \text{IF}_\ell \bar{e}_{\chi_i} \quad ,$$

où $\bar{e}_{\chi_i}$ désigne la réduction modulo ℓ de l'idempotent e_{χ_i} .

En effet , puisque S est cyclique , les groupes de cohomologie $H^k(S, \mathfrak{M})$ s'écrivent $H^1(S, \mathfrak{M}) = \text{Ker } \nu / \text{Im } \delta$ et $H^2(S, \mathfrak{M}) = \text{Ker } \delta / \text{Im } \nu$, ce qui les définit comme $Z_\ell[G]$ -modules . Ainsi , lorsque $\mathfrak{M}$ est indécomposable nous obtenons sans peine, en notant e_i pour e_i :

$$\chi$$

$\mathfrak{M}$	$\text{Ker } \nu$	$\text{Im } \delta$	$H^1(S, \mathfrak{M})$	$\text{Ker } \delta$	$\text{Im } \nu$	$H^2(S, \mathfrak{M})$
$Z_\ell[S] e_i$	$\delta Z_\ell[S] e_i$	$\delta Z_\ell[S] e_i$	0	$\nu Z_\ell e_i$	$\nu Z_\ell e_i$	0
$\delta Z_\ell[S] e_i$	$\delta Z_\ell[S] e_i$	$\delta^2 Z_\ell[S] e_i$	$\text{IF}_\ell \bar{e}_i$	0	0	0
$\nu Z_\ell e_i$	0	0	0	$\nu Z_\ell e_i$	$\nu \ell Z_\ell e_i$	$\text{IF}_\ell \bar{e}_i$

Il suit que la G -structure d'un module $\mathfrak{M}$, noethérien et sans Z_ℓ -torsion est uniquement déterminée par l'action de T sur les groupes de cohomologie associés à S .

5 . ETUDE DES MODULES DE Z_ℓ -TORSION SUR L'ALGEBRE $Z_\ell[G]$.

Envisageons maintenant le cas où $\mathfrak{M}$ est un $Z_\ell[G']$ -module de Z_ℓ -torsion .

§ 1 . Remarquons en premier lieu que tout ℓ -groupe abélien fini , muni d'une action de G' , est de façon canonique un $Z_\ell[G']$ -module . En particulier , une première approche de la structure de $\mathfrak{M}$ peut être obtenue par filtration :

Proposition II.10. Pour tout ℓ -groupe abélien fini $\mathfrak{M}$, muni d'une action de G , les sous-groupes $\mathfrak{M}_{(k)} = \text{Ker } \ell^k = \{x \in \mathfrak{M} \mid \ell^k x = 0\}$ forment une filtration croissante exhaustive de $\mathfrak{M}$, compatible avec la structure de $Z_\ell[G']$ -module . Les ordres des quotients $\mathfrak{M}_{(k+1)} / \mathfrak{M}_{(k)}$ décroissent vers 0 , et l'égalité $\mathfrak{M}_{(k+1)} = \mathfrak{M}_{(k)}$ n'a lieu qu'avec $\mathfrak{M}_{(k)} = \mathfrak{M}$.

Démonstration :

L'application $\ell | x \mapsto \ell x$ étant trivialement un G' -endomorphisme de $\mathfrak{M}$, les sous-groupes $(\mathfrak{M}_{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ forment une filtration croissante de sous- $Z_\ell[G]$ -modules de $\mathfrak{M}$. Comme la restriction de ℓ à un quo -

tient de $\mathfrak{M}$ n'est injective que si ce quotient est nul, la suite $(\mathfrak{M}_{(k)})$ est strictement croissante tant que $\mathfrak{M}_{(k)}$ est distinct de $\mathfrak{M}$; ce qui est notre première assertion. Le fait que les ordres des quotients aillent décroissant résulte de ce que ℓ induit, par passage au quotient, un morphisme de $\mathfrak{M}_{(k+1)} / \mathfrak{M}_{(k)}$ dans $\mathfrak{M}_{(k)} / \mathfrak{M}_{(k-1)}$, qui est injectif. Enfin, le groupe $\mathfrak{M}$ étant supposé fini, l'égalité de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{M}_{(k)}$ vaut pour k assez grand.

Compte-tenu de la nature du groupe G' , il peut être fait appel à une filtration plus fine que la filtration $\mathfrak{M}_{(k)}$: celle qui est engendrée par les itérés de l'opérateur δ .

Proposition II.11. Soit $\mathfrak{M}$ un ℓ -groupe abélien fini, muni d'une structure de $\mathbb{Z}_{\ell}[G']$ -module. Alors :

(i) Les sous-groupes $\mathfrak{M}_i = \text{Ker } \delta^i = \{x \in \mathfrak{M} \mid (1 - \sigma)^i x = 0\}$ forment une filtration croissante exhaustive de $\mathfrak{M}$, compatible avec la G' -structure.

(ii) Les ordres des quotients $\mathfrak{M}_{i+1} / \mathfrak{M}_i$ décroissent vers 0, et l'égalité $\mathfrak{M}_{i+1} = \mathfrak{M}_i$ n'a lieu qu'avec $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}$.

(iii) Pour tout caractère ψ , l'opérateur δ envoie injectivement le $\mathbb{Z}_{\ell}[T']$ -module quotient $e_{\psi}[\mathfrak{M}_{i+1} / \mathfrak{M}_i]$ dans le quotient $e_{\psi\chi}[\mathfrak{M}_i / \mathfrak{M}_{i-1}]$.

Démonstration :

L'application $\delta \mid x \longrightarrow (1 - \sigma)x$ n'est évidemment pas un G -endomorphisme du module $\mathfrak{M}$. Cependant :

(i) Les sous-groupes $(\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont stables pour l'action de G en vertu de l'identité :

$(1 - \sigma)^i \tau = \tau(1 - \sigma^{\chi(\tau)})^i = \tau(1 + \sigma + \dots + \sigma^{\overline{\chi}(\tau)-1})^i (1 - \sigma)^i$, valable pour tout τ de T' et dans laquelle $\overline{\chi}$ désigne une section du caractère χ modulo ℓ^S . La filtration $(\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est donc compatible avec la G' -structure de $\mathfrak{M}$.

(ii) Cela étant, la congruence : $(1 - X)^{\ell^S} \equiv 1 - X^{\ell^S} \pmod{\ell \mathbb{Z}[X]}$, dans l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[X]$, nous montre que l'élément δ^{ℓ^S} est divisible par ℓ dans l'algèbre $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$. L'application induite par δ^{ℓ^S} sur un quotient de $\mathfrak{M}$ n'est donc injective que si ce quotient est nul; et la même propriété vaut pour l'application induite par δ . En particulier, la suite $(\mathfrak{M}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante tant que $\mathfrak{M}_i$ est distinct de $\mathfrak{M}$. Comme plus haut, le fait que les ordres des quotients aillent décroissant, résulte de ce que δ induit, par passage au quotient, un morphisme injec-

tif de $\mathfrak{M}_{i+1} / \mathfrak{M}_i$ dans $\mathfrak{M}_i / \mathfrak{M}_{i-1}$. Et, $\mathfrak{M}$ étant supposé fini, l'égalité $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}$ vaut pour tout i assez grand.

(iii) Enfin, pour tout caractère ψ de T' , la congruence $e_{\psi\chi} \delta \equiv \delta e_{\psi} \pmod{\delta^2 \mathbb{Z}_{\ell}[G']}$, donnée par la proposition II.5 nous prouve que l'image du $\mathbb{Z}_{\ell}[T']$ -module $e_{\psi} [\mathfrak{M}_{i+1} / \mathfrak{M}_i]$ par l'opérateur δ dans le quotient $\mathfrak{M}_i / \mathfrak{M}_{i-1}$ est contenue dans le sous- $\mathbb{Z}_{\ell}[T']$ -module $e_{\psi\chi} [\mathfrak{M}_i / \mathfrak{M}_{i-1}]$.

Scolie.

Considérons l'élément $\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1}) \sigma^{\chi(\tau)}$ de l'algèbre

$\mathbb{Z}_{\ell}[S]$. Il satisfait aux congruences $\vartheta \equiv -\delta \pmod{\delta^2 \mathbb{Z}_{\ell}[S]}$, ainsi qu'aux identités $e_{\psi\chi} \vartheta = \vartheta e_{\psi}$, pour tout caractère ψ de T' .

Par suite, si $\mathfrak{M}$ est un $\mathbb{Z}_{\ell}[G']$ -module (non nécessairement fini), il vient :

$$\text{Ker } \vartheta^i = \text{Ker } \delta^i \quad \text{et} \quad \text{Im } \vartheta^i = \text{Im } \delta^i, \quad \text{pour tout } i \text{ de } \mathbb{N}.$$

Par un argument déjà utilisé (lemme II.6, proposition II.5) nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1}) \sigma^{\chi(\tau)} = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1}) (\sigma^{\chi(\tau)} - 1) = \\ &= -\frac{\delta}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1}) \frac{\sigma^{\chi(\tau)} - 1}{\sigma - 1} = -\frac{\delta}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1}) (1 + \sigma + \dots + \sigma^{\overline{\chi}(\tau) - 1}), \end{aligned}$$

$$\text{d'où :} \quad \vartheta \equiv -\frac{\delta}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1}) \overline{\chi}(\tau) \equiv -\delta \pmod{\delta^2 \mathbb{Z}_{\ell}[S]}.$$

L'élément δ étant un nilpotent topologique de l'algèbre $\mathbb{Z}_{\ell}[S]$, ceci suffit à prouver que ϑ est un générateur de l'idéal d'augmentation $\delta \mathbb{Z}_{\ell}[G]$.

Les identités $e_{\psi\chi} \vartheta = \vartheta e_{\psi}$, qui se démontrent sans difficulté à partir de la relation $\tau \vartheta = \chi(\tau) \vartheta \tau$ pour tout τ de T' , permettent d'interpréter agréablement l'action de δ sur les filtrations.

§ 2. Il semble cependant difficile de donner une description complète de la $\mathbb{Z}_{\ell}[G']$ -structure des G' -modules finis, a fortiori d'expliciter celle des $\mathbb{Z}_{\ell}[G']$ -modules noëthériens dès que leur sous-groupe de $\mathbb{Z}_{\ell}$ -torsion est non trivial.

Nous nous proposons simplement de le faire, pour un groupe métacyclique G , lorsque le sous-groupe de torsion est d'ordre ℓ . L'exemple choisi n'est pas gratuit : il correspond en effet au cas du module des unités d'une extension métacyclique sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire, qui est kummerienne sur son sous-corps cyclique.

Considérons donc un tel $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module $\mathfrak{M}$, et remarquons que la suite exacte courte associée au sous-module de $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion :

$$0 \longrightarrow T(\mathfrak{M}) \longrightarrow \mathfrak{M} \longrightarrow \mathfrak{M}/T(\mathfrak{M}) \longrightarrow 0 ,$$

est scindée sur l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[T]$.

Conformément à un argument déjà utilisé, $\mathfrak{M}$ s'identifie, en tant que $\mathbb{Z}_\ell[T]$ -module, à la somme directe $T(\mathfrak{M}) \oplus \mathfrak{M}/T(\mathfrak{M})$ et sa $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -structure est caractérisée par la classe dans le groupe

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}_\ell[G]}^1(\mathfrak{M}/T(\mathfrak{M}), T(\mathfrak{M})) \text{ du cocycle } f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell[T]}(\mathbb{Z}_\ell[G], \text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell}(\mathfrak{M}/T(\mathfrak{M}), T(\mathfrak{M})))$$

qui définit l'extension.

Ecrivons, comme plus haut, Hom pour $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_\ell[G]}$ et Ext pour $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_\ell[G]}^1$. Pour déterminer $\text{Ext}(\mathfrak{M}/T(\mathfrak{M}), T(\mathfrak{M}))$, il nous suffit, par ad-

ditivité du foncteur Ext , de calculer $\text{Ext}(\mathfrak{N}, T(\mathfrak{M}))$, lorsque $\mathfrak{N}$ est un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module indécomposable, de type fini, et sans $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion, c'est-à-dire pour chacun des $3n$ modules donnés par le théorème II.5.

Pour sa part, le facteur de torsion $T(\mathfrak{M})$, qui est d'ordre ℓ par hypothèse, est invariant par S d'après la proposition II.11, donc de la forme $\Gamma_j / \ell \Gamma_j$ pour un j convenable modulo n , i.e. :

$$T(\mathfrak{M}) \simeq \Gamma_j / \ell \Gamma_j \simeq \mathbb{F}_\ell \bar{e}_j .$$

Le mme II.12. Pour tout i modulo n , le foncteur Hom satisfait aux identités:

- (i) $\text{Hom}(\Gamma_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \text{Hom}(\Gamma_i / \ell \Gamma_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \partial_{ij} \mathbb{F}_\ell .$
- (ii) $\text{Hom}(\Xi_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \text{Hom}(\Xi_i / \delta \Xi_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \partial_{ij} \mathbb{F}_\ell .$
- (iii) $\text{Hom}(\mathfrak{S}^i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \text{Hom}(\mathfrak{S}^i / \mathfrak{S}^{i+1}, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \partial_{ij} \mathbb{F}_\ell .$

Démonstration :

Soit, en effet un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -morphisme $f \in \text{Hom}(\Gamma_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j)$. Par action de ℓ , il vient : $f\ell = \ell f = 0$, de sorte que f se factorise par $\Gamma_i / \ell \Gamma_i$. Or il n'existe pas de $\mathbb{F}_\ell(T)$ -morphisme non trivial de $\mathbb{F}_\ell \bar{e}_i$ dans $\mathbb{F}_\ell \bar{e}_j$, pour i distinct de j (modulo n); et $\text{End}_{\mathbb{F}_\ell[T]}(\mathbb{F}_\ell \bar{e}_j)$ est iso-

morphe à $\mathbb{F}_\ell$ ce qui est un cas particulier du lemme de Schur.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_i & \longrightarrow & \Gamma_j / \ell \Gamma_j \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Gamma_i / \ell \Gamma_i & & \end{array}$$

(ii) Supposons maintenant $f \in \text{Hom}(\Xi_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j)$.

De l'identité $\delta = \delta f = 0$, nous concluons que f se factorise par le quotient $\Xi_i / \delta \Xi_i$ qui est isomorphe à Γ_i . D'où la relation :

$$\text{Hom}(\Xi_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \simeq \text{Hom}(\Gamma_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j).$$

$$\begin{array}{ccc} \Xi_i & \longrightarrow & \Gamma_j / \ell \Gamma_j \\ \downarrow & \nearrow & \uparrow \\ \Gamma_i \simeq \Xi_i / \delta \Xi_i & \dashrightarrow & \Gamma_i / \ell \Gamma_i \end{array}$$

(iii) Enfin, si f appartient à $\text{Hom}(\mathfrak{S}^i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j)$, la même identité nous prouve que f se factorise par le quotient $\mathfrak{S}^i / \mathfrak{S}^{i+1}$ isomorphe à $\Gamma_i / \ell \Gamma_i$.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}^i & \longrightarrow & \Gamma_j / \ell \Gamma_j \\ \downarrow & \nearrow & \\ \Gamma_i / \ell \Gamma_i \simeq \mathfrak{S}^i / \mathfrak{S}^{i+1} & & \end{array}$$

Lemma 11.13. Pour tout i modulo n , le foncteur Ext est donné par les relations :

$$(i) \quad \text{Ext}(\Gamma_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \partial_j^{i+1} \text{IF}_\ell.$$

$$(ii) \quad \text{Ext}(\mathfrak{S}^i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \partial_j^i \text{IF}_\ell.$$

Démonstration :

Rappelons que nous avons $\text{Ext}(\Xi_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = 0$ puisque le module Ξ_i est $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -projectif. Cela étant, de la suite exacte courte de $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -modules :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{S}^{i+1} \longrightarrow \Xi_i \longrightarrow \Gamma_i \longrightarrow 0,$$

nous déduisons la suite exacte de groupes :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\Gamma_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \rightarrow \text{Hom}(\Xi_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{S}^{i+1}, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \rightarrow \text{Ext}(\Gamma_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \rightarrow 0$$

ce qui nous donne immédiatement :

$$\text{Ext}(\Gamma_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \simeq \text{Hom}(\mathfrak{S}^{i+1}, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \partial_j^{i+1} \text{IF}_\ell.$$

De façon semblable, de la suite courte :

$$0 \longrightarrow \nu \Gamma_i \longrightarrow \Xi_i \longrightarrow \mathfrak{S}^i \longrightarrow 0,$$

nous déduisons la suite exacte de groupes :

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathfrak{S}^i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \rightarrow \text{Hom}(\Xi_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \rightarrow \text{Hom}(\nu \Gamma_i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \rightarrow \text{Ext}(\mathfrak{S}^i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \rightarrow 0$$

qui conduit à l'isomorphisme :

$$\text{Ext}(\mathfrak{S}^i, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) \simeq \text{Hom}(\Gamma_i, \Gamma_i / \ell \Gamma_i) = \partial_j^i \text{IF}_\ell.$$

§ 3. Nous pouvons alors énoncer :

Theoreme 11.6. Soient G un groupe métacyclique d'ordre ℓn , et $\mathfrak{M}$ un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module de type fini, dont le sous-groupe de $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion est d'ordre ℓ . Alors $\mathfrak{M}$ s'écrit comme somme directe d'un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module noëthérien sans $\mathbb{Z}_\ell$ -torsion, et de l'un des $4n$ modules indécomposables suivants :

$$\Gamma_j / \ell \Gamma_j, \quad \Xi_j / \ell \nu \Xi_j, \quad \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}, \quad \oplus_i = [\Gamma_j / \ell \Gamma_j, \Gamma_{j-1}, \mathfrak{S}^i].$$

Démonstration :

Utilisons le théorème II.5 pour écrire $\mathfrak{M} / T(\mathfrak{M})$ comme somme directe de modules indécomposables . Les facteurs Ξ_i étant $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -projectifs , nous pouvons toujours nous ramener au cas où $\mathfrak{M} / T(\mathfrak{M})$ n'en contient pas dans sa décomposition .

Ecrivons donc $\mathfrak{M} / T(\mathfrak{M})$ comme somme d'exemplaires de modules $\mathfrak{S}^i$ et Γ_i , pour i décrivant $[1, n]$; et notons f l'élément de $\text{Ext}(\mathfrak{M} / T(\mathfrak{M}) , T(\mathfrak{M}))$ qui définit la structure de $\mathfrak{M}$. D'après le lemme II.13 , nous pouvons supposer que $\mathfrak{M} / T(\mathfrak{M})$ est somme directe de deux modules isotypiques seulement : $(\oplus_k \mathfrak{S}^j)$ et $(\oplus_h \Gamma_{j-1})$; et écrire $f = f_{\mathfrak{S}} + f_{\Gamma}$ avec $f_{\mathfrak{S}} \in \text{Ext}(\oplus_k \mathfrak{S}^j , \Gamma_j / \ell \Gamma_j)$ et $f_{\Gamma} \in \text{Ext}(\oplus_h \Gamma_{j-1} , \Gamma_j / \ell \Gamma_j)$. Quitte à modifier f par automorphismes de $(\oplus_k \mathfrak{S}^j)$ et $(\oplus_h \Gamma_{j-1})$, nous pouvons nous ramener au cas où $f_{\mathfrak{S}}$ et f_{Γ} proviennent tous deux d'un seul facteur indécomposable (au plus) , c'est-à-dire au cas où $\mathfrak{M} / T(\mathfrak{M})$ est somme d'au plus deux facteurs distincts et indécomposables , de la forme $\mathfrak{S}^j$ et Γ_{j-1} .

Quatre cas peuvent alors se produire :

(i) $f = 0$, auquel cas le sous-module de torsion $T(\mathfrak{M}) \simeq \Gamma_j / \ell \Gamma_j$ est facteur direct de $\mathfrak{M}$.

(ii) $f = f_{\mathfrak{S}} \neq 0$; et le facteur indécomposable qui contient $T(\mathfrak{M})$ est engendré par $\Gamma_j / \ell \Gamma_j$ et $\mathfrak{S}^j$. Puisque $\text{Ext}(\mathfrak{S}^j , \Gamma_j / \ell \Gamma_j)$ est égal à $\mathbb{F}_\ell$, il est clair par action d'un automorphisme de $\mathfrak{S}^j$, qu'il existe une et une seule extension indécomposable de $\Gamma_j / \ell \Gamma_j$ par $\mathfrak{S}^j$, à isomorphisme près . Or , il est facile de vérifier que $\mathfrak{N} = \Xi_j / \ell \vee \Xi_j$ en est une , puisque dans la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \vee \Xi_j / \ell \vee \Xi_j \longrightarrow \Xi_j / \ell \vee \Xi_j \longrightarrow \Xi_j / \vee \Xi_j \longrightarrow 0 ,$$

le noyau $\vee \Xi_j / \ell \vee \Xi_j$ est isomorphe à $\Gamma_j / \ell \Gamma_j$ et l'image $\Xi_j / \vee \Xi_j$ à $\mathfrak{S}^j$. Notant ξ un générateur de $\Gamma_j / \ell \Gamma_j$, nous pouvons remarquer que ξ appartient à $\vee \mathfrak{N}$ contrairement à ce que donnerait toute décomposition non triviale de $\mathfrak{N}$.

(iii) $f = f_{\Gamma} \neq 0$; et le facteur indécomposable qui contient $T(\mathfrak{M})$ est engendré par $\Gamma_j / \ell \Gamma_j$ et Γ_{j-1} . Comme plus haut , de l'égalité $\text{Ext}(\Gamma_j , \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \mathbb{F}_\ell$, nous concluons qu'il existe à isomorphisme près une et une seule structure qui convienne , puis qu'elle est donnée par $\mathfrak{N} = \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}$, compte-tenu de la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow \delta \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1} \longrightarrow \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1} \xrightarrow{\ell} \ell \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1} \longrightarrow 0 ,$$

dans laquelle le noyau $\delta \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}$ est isomorphe à $\Gamma_j / \ell \Gamma_j$ (d'après la congruence (iii) de la proposition II.5), et l'image $\ell \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}$ à Γ_{j-1} .

Enfin , si ξ est un générateur de $T(\mathfrak{M})$, nous avons ici $\xi \in \delta \mathfrak{N}$ contrairement à ce que donnerait toute décomposition non triviale .

(iv) $f = f_{\mathfrak{g}} + f_{\Gamma}$ avec $f_{\mathfrak{g}} \neq 0$ et $f_{\Gamma} \neq 0$. Par un argument déjà utilisé , il existe au plus une structure indécomposable possible , à isomorphisme près . Elle peut être définie sur la somme directe

$\Gamma_j / \ell \Gamma_j \oplus_{\mathbb{Z}_{\ell}} [T] \Gamma_{j-1} \oplus_{\mathbb{Z}_{\ell}} [T] \mathfrak{g}^j$, par l'identité :

$$\sigma(x, y, z) = (x + \bar{y} + \bar{z}, y, \zeta z) .$$

La relation $\zeta \in \text{Im } \delta \cap \text{Im } \nu$, nous prouve qu'elle est effectivement indécomposable .

Corollaire . Sous les hypothèses du théorème II.6 , soit $\mathfrak{N}$ le facteur indécomposable du module $\mathfrak{M}$, qui contient $T(\mathfrak{M})$. Notons χ^j le caractère de $T(\mathfrak{M})$ et ξ un générateur .

- (i) Sous la condition $\xi \notin \text{Im } \nu \cup \text{Im } \delta$,
le module $\mathfrak{N}$ est isomorphe à $\Gamma_j / \ell \Gamma_j$.
- (ii) Sous la condition $\xi \in \text{Im } \nu \setminus \text{Im } \delta$,
le module $\mathfrak{N}$ est isomorphe à $\Xi_j / \ell \nu \Xi_j$.
- (iii) Sous la condition $\xi \in \text{Im } \delta \setminus \text{Im } \nu$,
le module $\mathfrak{N}$ est isomorphe à $\Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}$.
- (iv) Sous la condition $\xi \in \text{Im } \delta \cap \text{Im } \nu$,
le module $\mathfrak{N}$ est isomorphe à Θ_j .

Scolie . Les groupes de cohomologie $H^k(S, \mathfrak{N})$ associés au facteur de torsion $\mathfrak{N}$ sont naturellement des $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ -modules sur lesquels S opère trivialement . Plus précisément :

- (i) $H^1(S, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \text{IF}_{\ell} \bar{e}_i$, $H^2(S, \Gamma_j / \ell \Gamma_j) = \text{IF}_{\ell} \bar{e}_j$.
- (ii) $H^1(S, \Xi_j / \ell \nu \Xi_j) = \text{IF}_{\ell} \bar{e}_i$, $H^2(S, \Xi_j / \ell \nu \Xi_j) = 0$.
- (iii) $H^1(S, \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}) = 0$, $H^2(S, \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}) = \text{IF}_{\ell} \bar{e}_{j-1}$.
- (iv) $H^1(S, \Theta_j) = 0$, $H^2(S, \Theta_j) = 0$.

Nous avons en effet :

$\mathfrak{N}$	$\text{Ker } \nu$	$\text{Im } \delta$	$H^1(S, \mathfrak{N})$	$\text{Ker } \delta$	$\text{Im } \nu$	$H^2(S, \mathfrak{N})$
$\Gamma_j / \ell \Gamma_j$	$\Gamma_j / \ell \Gamma_j$	0	$\text{IF}_\ell \bar{e}_j$	$\Gamma_j / \ell \Gamma_j$	0	$\text{IF}_\ell \bar{e}_j$
$\Xi_j / \ell \nu \Xi_j$	$\ell \Xi_j / \ell \nu \Xi_j$	$\delta \Xi_j$	$\text{IF}_\ell \bar{e}_j$	$\nu \Xi_j / \ell \nu \Xi_j$	$\nu \Xi_j / \ell \nu \Xi_j$	0
$\Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}$	$\delta \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}$	$\delta \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}$	0	$\ell \Xi_{j-1} / \ell \delta \Xi_{j-1}$	$\nu \Xi_{j-1} / \ell \nu \Xi_{j-1}$	$\text{IF}_\ell \bar{e}_{j-1}$
$\oplus_j$	$\Gamma_j / \ell \Gamma_j \oplus \mathfrak{R}^{j+1}$	$\Gamma_j / \ell \Gamma_j \oplus \mathfrak{R}^{j+1}$	0	$\Gamma_j / \ell \Gamma_j \oplus \ell \Gamma_{j-1}$	$\Gamma_j / \ell \Gamma_j \oplus \ell \Gamma_{j-1}$	0

Et la G -structure du module $\mathfrak{N}$ est déterminée de façon unique par l'action de T sur les groupes de cohomologie associés à S .

CHAPITRE III

PROPRIETES GALOISIENNES DES ANNEAUX D'ENTIERS

Rappelons qu'un anneau de Dedekind peut se définir comme un anneau d'intégrité héréditaire, c'est-à-dire un anneau d'intégrité dont tout idéal est projectif.

Si A est un tel anneau, et L une extension séparable de degré fini de son corps des fractions, le théorème de Krull-Akizuki nous assure que la fermeture intégrale B de A dans le corps L est un anneau de Dedekind, ainsi qu'un A -module sans torsion de type fini, et par suite, projectif.

Quand de plus l'extension L est normale sur le corps des fractions K de A , le groupe de Galois G opère sur l'anneau des entiers B qui est donc de façon naturelle un $A[G]$ -module noethérien. Comme, par le théorème de la base normale, le corps L est libre sur l'algèbre $K[G]$ (cf. [Bou], Ch. V § 10, th. 5), l'anneau B est un $A[G]$ -module sans torsion. Il est bien connu qu'il est même projectif en ramification modérée. Plus précisément, le résultat d'E. Noether [No] conduit aux équivalences suivantes :

Théoreme III.1. Soient A un anneau de Dedekind, B sa fermeture intégrale dans une extension galoisienne L de son corps des fractions K , et G le groupe de Galois $\text{Gal}(L/K)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'anneau des entiers B est un $A[G]$ -module projectif.
- (ii) L'application trace $\text{Tr}_{L/K}$ envoie B sur A .
- (iii) L'extension L/K est modérément ramifiée.
- (iv) L'anneau B est un $A[G]$ -module localement libre.
- (v) L'ordre $\mathfrak{O}_B = \{\lambda \in K[G] \mid \lambda B \subset B\}$ se réduit à $A[G]$.

1 . POSITION DU PROBLEME .

Soient A un anneau de Dedekind et B sa fermeture intégrale dans une extension séparable de degré fini sur son corps des fractions.

§ 1 . Lorsque l'anneau B est un A -module libre , un premier problème qui vient à l'esprit est celui du choix d'un système privilégié de générateurs de B sur A . Une façon de procéder consiste alors à introduire le groupe de Galois d'une clôture galoisienne et à poser :

Définition III.1. Soient A un anneau de Dedekind , B sa fermeture intégrale dans une extension séparable L , de degré fini sur son corps des fractions K , et N une clôture galoisienne de L sur K , de groupe de Galois G . Une A -base $(r_1, \dots, r_n)$ de B est dite normale , lorsqu'il existe un système de représentants $(s_1, \dots, s_n)$ de classes à droite de $\text{Gal}(N/K)$ modulo $\text{Gal}(N/L)$, et une $K[G]$ -base r de N , tels que les r_i puissent s'écrire :

$$r_i = \text{Tr}_{N/L}(s_i r) , \text{ pour } i = 1, \dots, n .$$

Cette définition étend celle de base normale au sens habituel , pour les extensions galoisiennes . De plus :

Proposition III.1. Soient A un anneau de Dedekind , A_L sa fermeture intégrale dans une extension séparable L , de degré fini sur son corps des fractions K , et N une extension galoisienne de K au-dessus de L , de groupe de Galois G et d'anneau des entiers A_N . S'il existe une $A[G]$ -base r de A_N , alors , pour tout système de représentants $(s_1, \dots, s_n)$ des classes à droite de G modulo $\text{Gal}(N/L)$, les éléments $\text{Tr}_{N/L}(s_i r)$, pour $i = 1, \dots, n$, constituent une A -base normale de A_N .

Démonstration :

Sous les hypothèses de la proposition , les éléments de A_N s'écrivent de façon unique $b = \sum_{t \in H} \sum_{i=1}^n a_{it} t s_i r$, où H désigne le groupe $\text{Gal}(N/L)$; et les éléments de A_L sont ceux pour lesquels a_{it} est indépendant de t . Pour tout b de A_L , nous obtenons donc l'égalité :

$b = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{t \in H} t s_i \tau = \sum_{i=1}^n a_i \text{Tr}_{N/L}(s_i \tau)$; ce qui nous prouve que les éléments $\text{Tr}_{N/L}(s_i \tau)$ constituent une A-base de A_L . Il est clair qu'il s'agit d'une base normale associée à l'élément $\tau' = \text{Tr}_{N/N'}(\tau)$ de la clôture galoisienne N' de L dans N .

§ 2 . Un premier résultat de base normale pour les anneaux d'entiers des corps de nombres , concerne les extensions abéliennes dont le degré est étranger au discriminant ([Hi] , th. 132) .

Ce théorème a été précisé par Speiser (cf. par exemple [Lo], Ch.9 § 3) :

Théoreme III.2 (Hilbert-Speiser) .

Pour que l'anneau des entiers d'une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ admette une base normale , il faut et il suffit que la ramification soit modérée .

En effet , lorsque l'extension N/K n'est pas modérément ramifiée , le théorème III.1 ci-dessus rend vaine toute recherche d'une base normale pour les anneaux d'entiers des corps galoisiens . Une façon naturelle d'obvier à cette difficulté est alors d'introduire l'ordre

$$\mathfrak{O}_B = \{ \lambda \in K[G] \mid \lambda B \subset B \} ,$$

associé à l'anneau des entiers B dans l'algèbre $K[G]$ du groupe de Galois .

Lorsque la ramification est modérée, l'ordre $\mathfrak{O}_B$ se réduit à $A[G]$ d'après le théorème III.1 . Mais il est strictement plus grand en ramification sauvage . Par exemple , dans le cas d'une extension abélienne du corps des rationnels , le résultat de Leopoldt [Le] montre que l'ordre $\mathfrak{O}_B$ est l'algèbre sur $\mathbb{Z}$ engendrée par $\mathbb{Z}[G]$ et les idempotents :

$$e_H = \frac{1}{|H|} \sum_{t \in H} t ,$$

où H parcourt les sous-groupes supérieurs de ramification des idéaux premiers de B .

Il vient alors :

Théoreme III.3 (Leopoldt) .

L'anneau des entiers d'une extension abélienne du corps des rationnels est libre sur son ordre associé .

§ 3 . La démonstration du " Hauptsatz " de Leopoldt , comme celle du théorème 132 de Hilbert , se fait en plongeant l'extension abélienne dans un corps cyclotomique , technique qui n'est , bien entendu , pas généralisable .

Le premier exemple de base normale pour les anneaux d'entiers d'extensions galoisiennes à groupe non abélien est celui de J. Martinet [Ma 1] sur les extensions diédrales d'ordre 2ℓ du corps des rationnels . Ce résultat a été étendu au cas sauvagement ramifié par A.M. Bergé qui démontre dans [Be] que l'anneau des entiers d'une extension diédrale d'ordre 2ℓ sur $\mathbb{Q}$ est libre sur l'ordre associé .

Plus récemment , dans [Fr] , A. Fröhlich a établi qu'un théorème de base normale vaut également pour l'anneau des entiers d'une extension métacyclique d'ordre ℓn , modérément ramifiée sur le corps des rationnels . Mais ici , le résultat ne s'étend pas au cas sauvage par passage à l'ordre associé puisque J. Cougnard montre dans [F] :

Proposition III.1. Il existe des extensions métacycliques d'ordre pq (p et q premiers) sur le corps des rationnels telles que le produit $\mathfrak{M}A_N$ de l'anneau des entiers A_N et d'un ordre maximal $\mathfrak{M}$ de l'algèbre $\mathbb{Q}[G]$ ne soit pas $\mathfrak{M}$ -stablement libre .

Il est clair , en effet , que pour une telle extension N , l'anneau des entiers A_N n'est pas libre sur l'ordre associé , puisque l'identité $A_N = \mathfrak{O}_{A_N} \mathfrak{r}$ entraînerait $\mathfrak{M}A_N = \mathfrak{M} \mathfrak{r}$, contrairement à la proposition . La question se pose néanmoins dans ce cas de savoir si l'anneau A_N est localement libre sur son ordre associé et de déterminer explicitement cet ordre .

D'autre part , si N est une extension métacyclique de degré $\ell^s n$ sur $\mathbb{Q}$, nous pouvons appliquer à l'anneau des entiers A_N les méthodes de dévissage définies au Chapitre II.2 . En particulier , le théorème II.3 nous donne un isomorphisme :

$$A_N/A_{N^{s-1}} \simeq \bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{j=1}^{q_i} a_{ij} \mathfrak{L}^i .$$

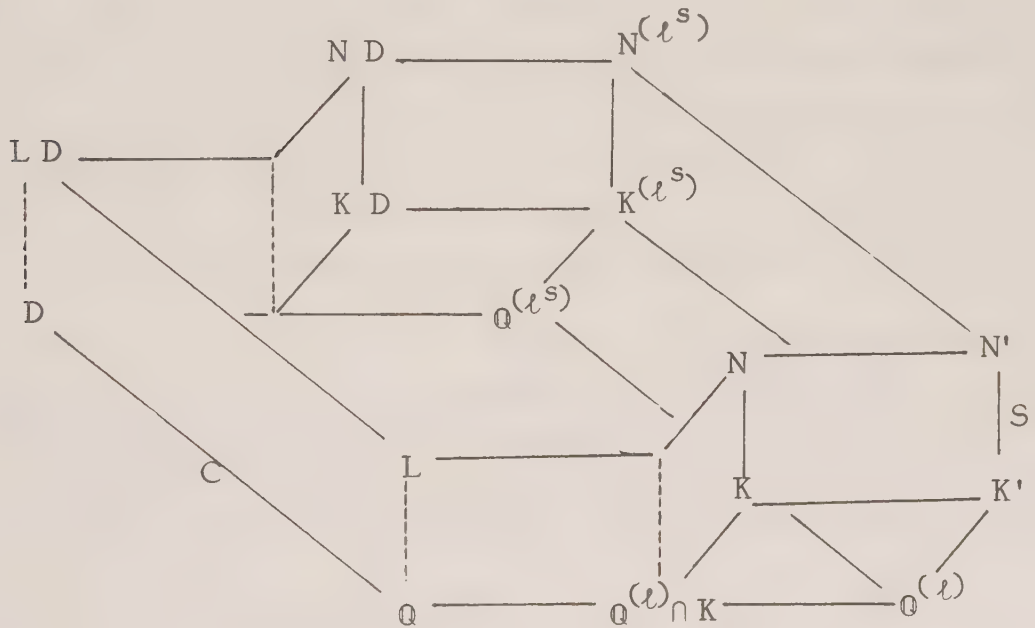
Nous nous proposons dans ce qui suit de préciser les invariants de cette décomposition : le calcul de la classe de l'idéal $\prod_{i,j} a_{ij}$ dans l'anneau de Dedekind $A_{\mathbb{Q}}^{(\ell^s)}$ s'appuie sur la méthode des résolvantes de Lagrange , tout comme dans [Ma 1] et [Co 2] . La détermination des indices q_i ressort , elle , de méthodes locales .

2 . DESCRIPTION DU CORPS MIROIR ASSOCIE AUX
RESOLVANTES DE LAGRANGE .

Considérons une extension métacyclique N , de degré $\ell^s n$ sur le corps des rationnels , de groupe de Galois G , produit semi-direct de son sous-groupe dérivé S d'ordre ℓ^s et d'un sous-groupe cyclique T d'ordre n .

Désignons par χ le caractère de l'action de T sur S et adjoignons à N les racines $\ell^{s-i\text{èmes}}$ de l'unité . L'extension obtenue $N^{(\ell^s)}$ est composée directe de l'extension cyclique D , d'ordre ℓ^{s-1} , contenue dans le corps cyclotomique $\mathbb{Q}^{(\ell^s)}$, et de l'extension N' , engendrée sur N par les racines $\ell^{s-i\text{èmes}}$ de l'unité , qui est métabélienne de degré $\ell^s n'$ sur $\mathbb{Q}$.

Ecrivons T' le groupe de Galois $\text{Gal}(K'/\mathbb{Q})$, puis , par abus de notation χ le caractère de l'action de T' sur S .



Le groupe de Galois $G' = \text{Gal}(N/\mathbb{Q})$ est produit semi-direct de S et de T' , et le groupe $\text{Gal}(N^{(\ell^s)}/\mathbb{Q})$ est le produit direct de G' et de $C = \text{Gal}(D/\mathbb{Q})$.

Définition III.2 . Pour tout élément r de $N^{(\ell^S)}$ et tout caractère Ψ du groupe S , à valeurs dans le corps cyclotomique $\mathbb{Q}^{(\ell^S)}$, nous appelons résolvante de Lagrange de r et de Ψ l'élément :

$$\langle r, \Psi \rangle = \sum_{\eta \in S} \Psi(\eta^{-1}) r^\eta .$$

Avant d'étudier l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(N^{(\ell^S)}/\mathbb{Q})$ sur les résolvantes de Lagrange, rappelons la définition de l'involution du miroir :

Définition III.3 . Désignons par κ (respectivement par υ) le caractère ℓ -adique du groupe $C = \text{Gal}(D/\mathbb{Q})$ (respectivement du groupe $T' = \text{Gal}(K^{(\ell)}/\mathbb{Q})$) défini par l'action galoisienne sur le groupe des racines ℓ^S -ièmes de l'unité. L'application $\psi \mapsto \psi^* = \upsilon \psi^{-1}$ est une involution du groupe des caractères ℓ -adiques de T' , appelée involution du miroir .

Proposition III.2. Tout élément r de $N^{(\ell^S)}$ s'écrit comme somme de résolvantes :

$$r = \ell^{-S} \sum_{\Psi \in S^*} \langle r, \Psi \rangle .$$

De plus, pour tout r de $N^{(\ell^S)}$ et tout caractère Ψ de S , le groupe de Galois $\text{Gal}(N^{(\ell^S)}/\mathbb{Q})$ opère sur les résolvantes de Lagrange conformément aux relations :

- (i) Pour tout η de S , $\eta \langle r, \Psi \rangle = \langle r^\eta, \Psi \rangle = \Psi(\eta) \langle r, \Psi \rangle$.
- (ii) Pour tout τ de T' , $\tau \langle r, \Psi \rangle = \langle r^\tau, \Psi^{\chi^*(\tau)} \rangle$.
- (iii) Pour tout γ de C , $\gamma \langle r, \Psi \rangle = \langle r^\gamma, \Psi^{\kappa(\gamma)} \rangle$.

Démonstration :

Pour obtenir la décomposition d'un élément r de $N^{(\ell^S)}$ comme somme de résolvantes, il suffit de considérer la quantité :

$$\sum_{\Psi \in S^*} \langle r, \Psi \rangle = \sum_{\eta \in S} \left[\sum_{\Psi \in S^*} \Psi(\eta^{-1}) \right] r^\eta = \sum_{\eta \in S} \Psi_{\text{reg}}(\eta^{-1}) r^\eta = \ell^S r .$$

Cela étant, nous avons (cf. prop. V.1) :

$$\begin{aligned} \eta \left[\sum_{\alpha \in S} \Psi(\alpha^{-1}) r^\alpha \right] &= \sum_{\alpha \in S} \Psi(\alpha^{-1}) r^{\eta\alpha} = \sum_{\alpha\eta \in S} \Psi(\eta) \Psi(\eta^{-1}\alpha^{-1}) r^{\alpha\eta} \\ \tau \left[\sum_{\alpha \in S} \Psi(\alpha^{-1}) r^\alpha \right] &= \sum_{\alpha \in S} (\Psi(\alpha^{-1}))^{\upsilon(\tau)} r^{\tau\alpha\chi^{(\tau)}} = \sum_{\beta \in S} \Psi^{\upsilon(\tau)} \chi^{-1(\tau)}(\beta^{-1}) r^{\tau\beta} \\ \gamma \left[\sum_{\alpha \in S} \Psi(\alpha^{-1}) r^\alpha \right] &= \sum_{\alpha \in S} (\Psi(\alpha^{-1}))^{\kappa(\gamma)} r^{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha \in S} \Psi^{\kappa(\gamma)}(\alpha^{-1}) r^{\gamma\alpha} ; \end{aligned}$$

ce qui établit la proposition .

Une propriété , bien connue , des résolvantes de Lagrange est de caractériser les éléments de N qui engendrent une K -base normale . Plus précisément :

Proposition III.3. Un élément r de N en est une $K[S]$ -base si et seulement si les résolvantes de Lagrange $\langle r, \Psi \rangle$ associées aux caractères de S sont toutes non nulles . De plus , lorsqu'il en est ainsi , les $\langle r, \Psi \rangle^{\ell^S}$ sont deux à deux distinctes , pour Ψ parcourant S^* .

Démonstration :

Supposons d'abord que r définisse une K -base normale de N . Pour toute relation $\langle r, \Psi \rangle = 0$, la proposition précédente nous donne :

$$\langle r^\eta, \Psi \rangle = \Psi(\eta) \langle r, \Psi \rangle = 0 , \text{ pour chaque } \eta \text{ de } S ;$$

puis , par linéarité :

$\langle \eta, \Psi \rangle = 0$, pour tout η de N , contrairement au lemme de Dedekind (cf. [Sa], II § 7) .

Réciproquement , si les résolvantes $\langle r, \Psi \rangle$ sont non nulles , toute condition de liaison $\lambda r = 0$, pour un élément $\lambda = \sum_{\eta \in S} \lambda_\eta \eta$ de $K[S]$

entraîne :

$$\sum_{\eta \in S} \lambda_\eta \Psi(\eta) = \frac{(\sum \lambda_\eta \eta) \langle r, \Psi \rangle}{\langle r, \Psi \rangle} = \frac{\langle \sum \lambda_\eta r^\eta, \Psi \rangle}{\langle r, \Psi \rangle} = 0 , \text{ pour chaque caractère } \Psi ,$$

c'est-à-dire finalement $\sum_{\eta \in S} \lambda_\eta \eta = 0$, ce qui contredit le lemme de

Dedekind .

Enfin , lorsque r est une $K[S]$ -base de N , l'égalité $\langle r, \Psi \rangle^{\ell^S} = \langle r, \Psi' \rangle^{\ell^S}$, pour deux caractères Ψ et Ψ' de S , peut encore s'écrire $\langle r, \Psi \rangle = \xi \langle r, \Psi' \rangle$, pour une racine $\ell^{S-i\text{ème}}$ convenable de l'unité et donc en fait : $\langle \eta, \Psi \rangle = \xi \langle \eta, \Psi' \rangle$, pour tout η de N , en vertu de l'assertion (i) de la proposition III.2 . Par application du lemme de Dedekind, il vient alors $\Psi = \xi \Psi'$, puis $\Psi = \Psi'$; ce qui achève la démonstration.

§ 2 . Nous sommes désormais en mesure d'écrire :

Définition III.4. Par définition le corps miroir K^* du corps K est le sous-corps de $K^{(\ell)}$, fixé par le noyau $\text{Ker } \chi^*$ du caractère χ , image de χ^* dans l'involution du miroir .

Theoreme III.4. Nous appelons corps des résolvantes de Lagrange le sous-corps $\tilde{K}$ de $N^{(\ell^s)}$ engendré sur $\mathbb{Q}$ par les puissances ℓ^{s-i} des résolvantes de Lagrange des éléments de L . Alors :

(i) Pour tout élément r de L qui définit une $K[S]$ -base de N , et tout caractère primitif ψ de S , la résolvante $\langle r, \psi \rangle^{\ell^s}$ est un élément primitif du corps $\tilde{K}$.

(ii) Le corps des résolvantes $\tilde{K}$ est composé direct de K^* et de D .

Démonstration :

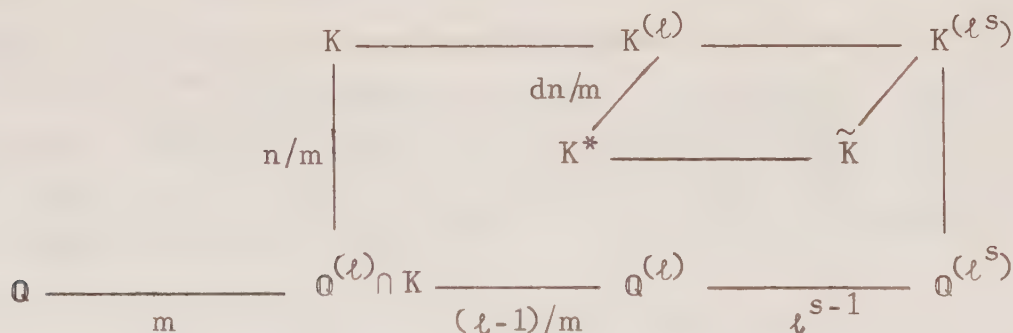
Nous savons, par le théorème de la base normale, que le corps N est un $K[S]$ -module libre de rang 1, dont le générateur r peut être pris dans L . Cela étant, la proposition III.2, qui décrit l'action du groupe $\text{Gal}(N^{(\ell^s)}/\mathbb{Q})$ sur les résolvantes, nous donne les relations :

$$\eta \langle r, \psi \rangle^{\ell^s} = \langle r, \psi \rangle^{\ell^s}, \quad \text{pour tout } \eta \text{ de } S.$$

$$\tau \langle r, \psi \rangle^{\ell^s} = \langle r, \psi^{\chi^*(\tau)} \rangle^{\ell^s}, \quad \text{pour tout } \tau \text{ de } T'.$$

$$\gamma \langle r, \psi \rangle^{\ell^s} = \langle r, \psi^{\chi(\gamma)} \rangle^{\ell^s}, \quad \text{pour tout } \gamma \text{ de } C.$$

Il en résulte en particulier que le corps des résolvantes $\tilde{K}$ est contenu dans la sous-extension abélienne $K^* D$ de $N^{(\ell^s)}$ qui est fixée par S et par $\text{Ker } \chi^*$. Si donc $(\ell-1)/d$ désigne l'ordre du caractère χ^* , le corps $K^* D$ est de degré $\ell^{s-1}(\ell-1)/d$ sur $\mathbb{Q}$, et le théorème résulte de ce que la résolvante $\langle r, \psi \rangle^{\ell^s}$ possède exactement $\ell^{s-1}(\ell-1)/d$ conjugués distincts dans $\tilde{K}$, en vertu de la proposition III.3.



Désignons par m le degré de la sous-extension $\mathbb{Q}^{(\ell)} \cap K$. Il est clair que la restriction au groupe $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{(\ell)}/\mathbb{Q})$ du caractère χ dé-

finit un caractère d'ordre m ; de sorte que le corps miroir K^* contient le sous-corps d'indice m du corps cyclotomique $\mathbb{Q}^{(\ell)}$, et que d divise m .

§ 3 . Etant donné un anneau de Dedekind B et un entier positif q , il est bien connu que tout idéal fractionnaire non nul $\mathfrak{A}$ de B s'écrit de façon unique $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}^q \prod_{i=1}^{q-1} \mathfrak{A}_i^i$, où $\mathfrak{R}$ est un idéal fractionnaire de B et les $(\mathfrak{A}_i)_{i=1, \dots, q}$ des idéaux entiers , sans facteur carré et deux à deux étrangers .

Appliquons ce résultat à l'anneau des entiers $\tilde{A}$ du corps des résolvantes . Nous obtenons :

Proposition III.4. Pour tout caractère ψ du groupe S , les idéaux entiers $\mathfrak{A}_i(\psi)$ et la classe $\mathcal{Cl}_{\tilde{A}}(\mathfrak{R}(\psi))$ de l'idéal fractionnaire $\mathfrak{R}(\psi)$ intervenant dans la

décomposition de l'idéal principal :

$$\lambda(\psi) = \langle \mathfrak{r}, \psi \rangle^{\ell^S} \tilde{A} = \mathfrak{R}(\psi)^{\ell^S} \prod_{i=1}^{\ell^S-1} \mathfrak{A}_i^i(\psi) ,$$

pour un générateur arbitraire $\mathfrak{r} \in L$ de N sur $K[S]$, sont des invariants de l'extension $N/\mathbb{Q}$ associés au caractère ψ .

Pour établir ce point , nous nous appuierons sur le lemme :

Lemme III.5. Soient $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}'$ deux éléments de L , puis ψ et ψ' deux caractères du groupe S . Alors , lorsqu'ils existent , les quotients :

$$\frac{\langle \mathfrak{r}, \psi \rangle \langle \mathfrak{r}, \psi' \rangle}{\langle \mathfrak{r}, \psi \psi' \rangle} \quad \text{et} \quad \frac{\langle \mathfrak{r}', \psi \rangle}{\langle \mathfrak{r}, \psi \rangle} ,$$

sont dans le corps $\tilde{K}$.

Démonstrations :

Le lemme résulte immédiatement de l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(N^{(\ell^S)}/\mathbb{Q})$ sur les résolvantes , décrite par la proposition III.2 .

Cela étant , prenons $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}'$ dans L définissant l'un et l'autre une $K[S]$ -base de N . Les résolvantes $\langle \mathfrak{r}, \psi \rangle$ et $\langle \mathfrak{r}', \psi \rangle$ sont non nulles d'après la proposition III.3 , et le lemme nous permet donc d'écrire

$\langle \mathfrak{r}', \Psi \rangle = \lambda(\mathfrak{r}', \mathfrak{r}) \langle \mathfrak{r}, \Psi \rangle$, pour un $\lambda(\mathfrak{r}', \mathfrak{r})$ de $\tilde{K}$, puis :

$$\lambda'(\Psi) = \left(\mathfrak{R}(\Psi) \lambda(\mathfrak{r}', \mathfrak{r}) \right)^{\ell^S} \prod_{i=0}^{\ell^S-1} \mathfrak{u}_i^i(\Psi) ;$$

et un argument d'unicité nous permet de conclure .

D'autre part nous pouvons remarquer que pour tout $i = 1, \dots, \ell^S-1$, le quotient $\langle \mathfrak{r}, \Psi^i \rangle / \langle \mathfrak{r}, \Psi \rangle^i$ est un élément de $\tilde{K}$, par récurrence à partir du lemme . Traduisant cette identité dans la décomposition des idéaux associés , nous obtenons :

Corollaire . Pour tout caractère Ψ du groupe S , l'idéal $\mathfrak{u}_i(\Psi^i)$ est indépendant de i ; ce qui s'écrit : $\mathfrak{u}_i(\Psi^i) = \mathfrak{u}(\Psi)$.

Enfin , connaissant l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(N^{(\ell^S)}/\mathbb{Q})$ sur les résolvantes de Lagrange (prop.III.2) , nous déduisons sans peine , toujours par un argument d'unicité :

Proposition III.6. L'action du groupe de Galois $\text{Gal}(\tilde{K}/\mathbb{Q})$ sur les idéaux $\mathfrak{u}(\Psi)$ associés aux caractères de S , est déterminée par les deux relations :

(i) $\mathfrak{u}^\tau(\Psi) = \mathfrak{u}(\Psi \chi^{*(\tau)})$, pour tout τ de T' .

(ii) $\mathfrak{u}^\gamma(\Psi) = \mathfrak{u}(\Psi \chi^{(\gamma)})$, pour tout γ de C .

3 . DETERMINATION DE L'INVARIANT GLOBAL POUR UNE EXTENSION METACYCLIQUE .

Considérons une extension métacyclique N de degré $\ell^s n$ sur le corps des rationnels , et soit A_N l'anneau de ses entiers .

§ 1 . L'application à A_N des méthodes de dévissage décrites au chapitre II.2 conduit à considérer les deux modules relatifs : A_N^* , formé des entiers de N de trace nulle sur N^{s-1} ; et $A_N/A_{N^{s-1}}$, quotient de A_N par l'anneau des entiers de N^{s-1} , puis à écrire les décompositions :

$$A_N/A_{N^{s-1}} \simeq \bigoplus_{i,j} a_{ij} \mathcal{L}^i \quad \text{et} \quad A_N^* \simeq \bigoplus_{i,j} b_{ij} \mathcal{L}^i .$$

Dans l'un et l'autre cas , le sous-module des invariants de T s'identifie par un argument de modération à l'image de l'opérateur trace $\sum_{\tau \in T} \tau$; de sorte que nous obtenons :

$$A_L/A_{L^{s-1}} \simeq \bigoplus_{i,j} a_{ij} \mathcal{L}_0^{[(i+n-1)/n]} \quad \text{et} \quad A_L^* \simeq \bigoplus_{i,j} b_{ij} \mathcal{L}_0^{[(i+n-1)/n]} .$$

Et comme le sous-module A_L^* est clairement d'indice fini ℓ -primaire dans le quotient $A_L/A_{L^{s-1}}$, il lui est $A_0^{(\ell^s)}$ -isomorphe .

Autrement dit les produits $\prod_{i,j} a_{ij}$ et $\prod_{i,j} b_{ij}$ ont même image

$\mathcal{C}_{A_0^{(\ell^s)}}(A_L/A_{L^{s-1}})$ dans le groupe des classes d'idéaux de l'anneau de Dedekind $A_0^{(\ell^s)}$.

Theoreme III.5 . Etant donnée une extension métacyclique N , de degré $\ell^s n$ sur $\mathbb{Q}$, le quotient $A_N/A_{N^{s-1}}$ est muni canoniquement , par action du groupe de Galois , d'une structure de module projectif sur l'algèbre croisée $\Lambda^s = \mathbb{Z}[\zeta, T]$.

Dans la décomposition indécomposable $A_N/A_{N^{s-1}} \simeq \bigoplus_{i,j} a_{ij} \mathcal{L}^i$,

le sous-module fixé par T s'identifie au quotient :

$$A_L/A_{L^{s-1}} \simeq \bigoplus_{i,j} a_{ij} \mathcal{L}_0^{[(i+n-1)/n]} ;$$

de sorte que la classe du produit $\prod_{i,j} a_{ij}$ dans l'anneau $A_0^{(\ell^s)}$ est celle du module $A_L/A_{L^{s-1}}$.

Le calcul de la classe $\mathcal{Cl}\left(\prod_{i,j} a_{ij}\right)$ se fait alors en plongeant le quotient $A_L/A_{L^{s-1}}$ dans un $A_O^{(\ell^s)}$ -réseau convenable .

Definition III.5 . Pour tout entier $t = 1, \dots, s$ nous notons V_t le $\mathbb{Q}_O^{(\ell^t)}$ -espace vectoriel de dimension n somme directe de d exemplaires de $\tilde{K}_t$. Puis , faisant choix dans L^t d'une $K[S_t]$ -base r_O de N^t , et dans $S^{*\ell^{s-t}}$ d'un système de représentants $(\psi_1^{\ell^{s-t}}, \dots, \psi_d^{\ell^{s-t}})$ du groupe des caractères primitifs modulo son sous-groupe d'indice d , nous désignons par M_t le $A_O^{(\ell^t)}$ -réseau de V_t somme directe des d idéaux fractionnaires $\mathfrak{R}(\psi_j^{\ell^{s-t}})^{-1}$.

Nous écrivons enfin $V = \bigoplus_{t=1}^s V_t$ et $M = \bigoplus_{t=1}^s M_t$.

Proposition III.7. Soient $s_1, \dots, s_d$ dans le groupe de Galois $\text{Gal}(K^{(\ell^s)}/\mathbb{Q})$ satisfaisant à l'identité $s_j(\psi_j(\eta)) = \psi_1(\eta)$ pour tout η de S . Alors pour tout entier $t = 1, \dots, s$ l'application $f_t | r \mapsto \left(s_j \frac{\langle r, \psi_j^{\ell^{s-t}} \rangle}{\langle r_O, \psi_j^{\ell^{s-t}} \rangle} \right)_j$ détermine une suite exacte de $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels :

$$0 \longrightarrow L^{t-1} \longrightarrow L^t \xrightarrow{f_t} V_t \longrightarrow 0 .$$

Par passage au quotient , cette suite donne lieu à un isomorphisme de $\mathbb{Q}_O^{(\ell^t)}$ -espaces :

$$L^t/L^{t-1} \simeq V_t .$$

Démonstration :

Il est clair que chacune des applications f_t est $\mathbb{Q}$ -linéaire . Compte-tenu de l'équation aux dimensions : $\dim L^t = \ell^t = (\ell-1)\ell^{t-1} + \ell^{t-1} = \dim V_t + \dim L^{t-1}$, et du fait que $\text{Ker } f_t$ contient manifestement L^{t-1} , l'exactitude de la suite sera établie avec la surjectivité de f_t . Considérons alors la suite globale :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow L^s \xrightarrow{f = \bigoplus f_t} V \longrightarrow 0 .$$

D'après la proposition III.2 , le noyau $\text{Ker } f$ est constitué des éléments de L^s qui annulent les (ℓ^s-1) résolvantes associées aux caractères non

triviaux de S , c'est-à-dire des seuls éléments de $\mathbb{Q}$. De l'équation aux dimensions : $\dim L^S = \ell^S = (\ell^S - 1) + 1 = \dim V + \dim \mathbb{Q}$, il suit donc que $f(L^S)$ recouvre V ; autrement dit, que $f_t(L^t)$ est égal à V_t pour tout $t = 1, \dots, s$.

Compte-tenu de la proposition III.2, nous obtenons ainsi un $\mathbb{Q}_O^{(\ell^t)}$ -isomorphisme $L^t/L^{t-1} \simeq V_t$.

§ 2. Intéressons-nous à l'image $f_s(A_L)$ du module $A_L/A_{L^{s-1}}$ dans cet isomorphisme. C'est un $A_O^{(\ell^s)}$ -module de type fini qui vérifie $\mathbb{Q} f_s(A_L) = f_s(L) = V_s$, c'est-à-dire un $A_O^{(\ell^s)}$ -réseau de V_s . Comparons le au réseau M_s . Il vient :

Lemme III.8. L'image $f_s(A_L)$ de l'anneau des entiers de L est un $A_O^{(\ell^s)}$ -réseau de V_s , qui est d'indice fini, ℓ -primaire dans le réseau M_s .
En particulier, il suit $\mathcal{O}_L(A_L/A_{L^{s-1}}) = \mathcal{O}_L(f_s(A_L)) = \mathcal{O}_L(M_s)$.

Démonstration :

Pour tout r de L écrivons $f_s(r) = (f_s^{(1)}(r), \dots, f_s^{(d)}(r))$. Cela étant, prenons r entier et écrivons :

$$\langle r, \psi_j \rangle^{\ell^s} \tilde{A} = [f_s^{(j)}(r) \mathfrak{R}(\psi_j)]^{\ell^s} = \prod_{i=1}^{\ell^s-1} \mathfrak{U}_i^1(\psi_j)$$

la décomposition de l'idéal entier principal engendré par $\langle r, \psi_i \rangle^{\ell^s}$ dans l'anneau de Dedekind $\tilde{A}$. Puisque par construction le produit $\prod_{i=1}^{\ell^s-1} \mathfrak{U}_i^1(\psi_j)$ n'est divisible par aucune puissance $\ell^{s-i\text{ème}}$ d'un idéal de $\tilde{A}$, il suit que l'idéal $f_s^{(j)}(r) \mathfrak{R}(\psi_j)$ est entier dans $\tilde{A}$; autrement dit, que $f_s^{(j)}(r)$ est dans $\mathfrak{R}(\psi_j)^{-1}$ et, par suite, que $f_s(A_L)$ est un sous-réseau de M_s .

Réciproquement, la surjectivité de f_s nous assure, pour tout d -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ de V_s , l'existence d'un élément r de L vérifiant $f_s^{(j)}(r) = \lambda_j$, pour $j = 1, \dots, d$. Comme nous avons $r = \sum_{\psi \in S^*} \langle r, \psi \rangle \ell^{-s}$,

par la proposition III.2, il suit que nous pouvons prendre :

$$r = \ell^{-s} \sum_{j=1}^d \sum_{\eta \in \text{Gal}(\tilde{K}/\mathbb{Q})} [\lambda_j \langle r_0, \psi_j \rangle]^\eta$$

lequel est dans A_L dès que $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ est dans $\ell^s M_s$.

Ainsi l'image de l'anneau A_L est d'indice fini ℓ -primaire dans le réseau M_s ; et ceci suffit à prouver que $A_L/A_{L^{s-1}}$ et M_s sont isomorphes en tant que $A_O^{(\ell^s)}$ -modules .

Or , puisque M_s s'écrit $M_s = \bigoplus_{j=1}^d \mathfrak{R}(\Psi_j)^{-1}$ comme somme d'idéaux de $\tilde{K}$, sa classe en tant que $A_O^{(\ell^s)}$ -module est celle de la norme $N_{\tilde{K}/Q_O^{(\ell^s)}} \left[\prod_{j=1}^d \mathfrak{R}(\Psi_j)^{-1} \right]$.

Pour montrer que le produit $\prod_{i,j} a_{ij}$ est un idéal principal de $A_O^{(\ell^s)}$, il nous suffit de vérifier que l'idéal $N_{\tilde{K}/Q_O^{(\ell^s)}} \left[\prod_{j=1}^d \mathfrak{R}(\Psi_j)^{-\ell^s} \right]$ d'un idéal essentiel du corps cyclotomique $Q^{(\ell^s)}$.
En effet , suivant un résultat dû à A. Châtelet [Cha] :

Theoreme III.6 (A. Châtelet) .

Pour qu'un idéal $\mathcal{A}$ du corps cyclotomique $Q^{(m)}$ soit un idéal principal , il faut et il suffit que sa puissance $m^{\text{ième}}$ soit essentielle.

Rappelons qu'un idéal $\mathcal{B}$ du corps cyclotomique $Q^{(m)}$ est dit essentiel lorsque , pour tout élément $\sigma_a | \zeta \mapsto \zeta^a$ du groupe de Galois , l'idéal $\mathcal{B}^{\sigma_a^{-a}}$ est la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un idéal principal .

Plus précisément , nous utilisons le résultat suivant (cf.[Cha]).

Proposition III.9. Etant donné un idéal $\mathcal{A}$ du corps cyclotomique $Q^{(m)}$, sous la convention d'écriture $1/a \in [1, \ell^s - 1]$, l'idéal $\mathcal{B} = \prod_a \mathcal{A}^{\sigma_a^{1/a}}$ est essentiel.

§ 3 . Nous pouvons alors énoncer :

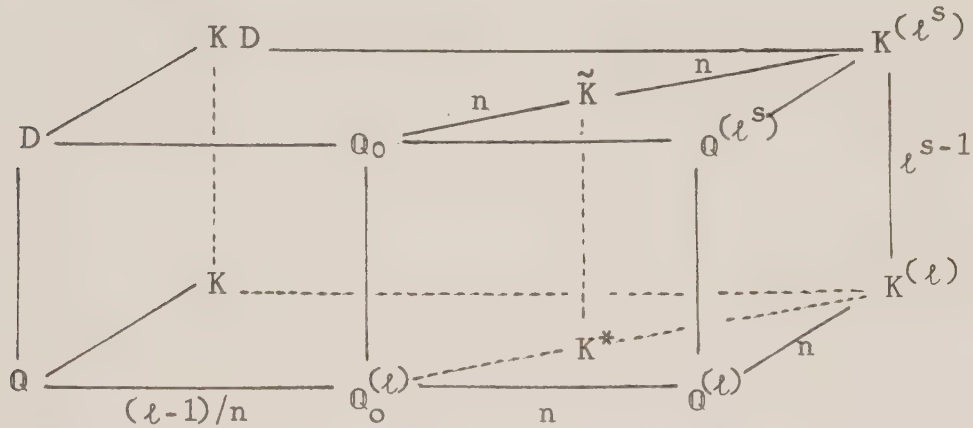
Theoreme III.7. | La classe $\mathcal{Cl}_{A_O^{(\ell^s)}} \left(\prod_{i,j} a_{ij} \right)$ est la classe principale .

Démonstration :

Nous nous bornons ci-dessous au cas , techniquement le plus simple , où le corps cyclique K est linéairement disjoint du corps cycloto-

mique . Et nous renvoyons à [Co 4] pour une démonstration générale du résultat .

Convenons donc $K \cap Q^{(\ell^s)} = Q$; et écrivons Q_0 pour $Q_0^{(\ell^s)}$ puis A_0 pour $A_0^{(\ell^s)}$. D'après le théorème III.4 , l'hypothèse de disjonction linéaire donne lieu au schéma de corps :



dans lequel le corps des résolvantes $\tilde{K}$ est de degré $\ell^{s-1}(\ell-1)$ sur Q .

Cela étant , le théorème sera établi dans ce cas, si nous montrons que pour un caractère irréductible ψ de S et un générateur r_0 dans L de N sur $K[S]$, l'idéal $N_{\tilde{K}/Q_0} \left(\langle r_0, \psi \rangle^{-1} \right)$ est principal dans l'anneau A_0 .

Ecrivons donc :

$$N_{\tilde{K}/Q_0} \left[\langle r_0, \psi \rangle^{\ell^s} \right] = N_{\tilde{K}/Q_0} \left(\langle r_0, \psi \rangle^{-\ell^s} \right) N_{\tilde{K}/Q_0} \left(\prod_{i=1}^{\ell^s-1} \mathfrak{A}_i^1(\psi) \right)$$

et étudions successivement les deux facteurs du produit .

Notons $\mathcal{A}$ le premier et formons les quotients $\mathcal{A}^{\sigma_a^{-a}}$, pour tous les σ_a de $\text{Gal}(Q^{(\ell^s)}/Q)$.

D'après la proposition III.2 nous obtenons :

$$\mathcal{A}^{\sigma_a^{-a}} = N_{\tilde{K}/Q_0} \left(\frac{\langle r_0, \psi^a \rangle^{\ell^s}}{\langle r_0, \psi \rangle^{a \ell^s}} \right) = N_{\tilde{K}/Q_0} \left[\left(\frac{\langle r_0, \psi^a \rangle}{\langle r_0, \psi \rangle^a} \right)^{-1} \right]^{\ell^s} ,$$

comme puissance $\ell^{s-i\text{ème}}$ d'un idéal principal de A_0 ; de sorte que l'idéal $\mathcal{A}$ est essentiel dans l'anneau cyclotomique .

D'autre part , faisant choix d'un générateur $\eta|\zeta \mapsto \zeta^d$ du groupe $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{(\ell^s)}/\mathbb{Q})$, et sous les conventions d'écriture de la proposition III.9 , nous obtenons pour le second facteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= N_{\tilde{K}/\mathbb{Q}_0} \left(\prod_{t=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{(\ell-1)\ell^{s-t-1}} \frac{\ell^t d^j}{\ell^t d^j} [\Psi] \right) = \\ &= N_{\tilde{K}/\mathbb{Q}_0} \left(\prod_{t=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{\ell^{s-t-1}} \frac{\ell^t d^j}{\ell^t} [\Psi^{d^{-j}}] \right) ; \end{aligned}$$

puis :

$$\mathcal{B} = N_{\tilde{K}/\mathbb{Q}_0} \left(\prod_{t=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{(\ell-1)\ell^{s-t-1}} \frac{\ell^t (\eta/d)^{-j}}{\ell^t} [\Psi] \right), \text{ par la propo-}$$

sition III.6 ; et enfin :

$$\mathcal{B} = N_{\tilde{K}/\mathbb{Q}_0} \left(\prod_{t=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{(\ell-1)\ell^{s-1}} \frac{(\eta/d)^{-j}}{\ell^t} (\Psi) \right), \text{ en remarquant que}$$

l'idéal $\mathfrak{a}_t(\Psi)$ est invariant par action du groupe de Galois $\text{Gal}(\tilde{K}/\tilde{K}_{s-t}) = \text{Gal}(\mathbb{Q}^{(\ell^s)}/\mathbb{Q}^{(\ell^t)})$.

Maintenant , puisque l'extension $\mathbb{Q}^{(\ell^s)}/\mathbb{Q}_0$ est totalement ramifiée , chacun des idéaux $N_{\tilde{K}/\mathbb{Q}_0}(\mathfrak{a}_t(\Psi))$ est équivalent dans A_0 à la norme $N_{\mathbb{Q}^{(\ell^s)}/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}_t)$ d'un idéal de $A^{(\ell^s)}$.

Il vient donc :

$$\mathcal{B} = \left(\prod_{t=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{(\ell-1)\ell^{s-1}} \frac{(\eta/d)^{-j}}{\ell^t} \right) \cdot N_{\mathbb{Q}^{(\ell^s)}/\mathbb{Q}_0} \left(\prod_{t=0}^{s-1} \prod_{j=1}^{(\ell-1)\ell^{s-1}} \frac{(\eta/d)^{-j}}{\ell^t} \right)$$

idéal principal de A_0 , provenant d'un idéal essentiel du corps cyclotomique .

Récapitulant ces résultats , nous avons prouvé que l'idéal $N_{\tilde{K}/\mathbb{Q}_0}(\mathfrak{a}(\Psi)^{-1})$ capitule dans le corps cyclotomique $\mathbb{Q}^{(\ell^s)}$, et que sa puissance $\ell^{s-i\text{ème}}$ est principale dans $\mathbb{Q}_0$.

Ceci suffit à prouver qu'il est principal dans $\mathbb{Q}_0$, en vertu du théorème de Bezout .

4 . STRUCTURE LOCALE DE L'ANNEAU DES ENTIERS D'UNE EXTENSION METABELIENNE .

Nous supposons dans ce qui suit , que $\mathbb{N}$ est une extension métabélienne sur le corps des rationnels , composée directe d'une extension abélienne et d'une extension métacyclique .

§ 1 . Considérons d'abord le cas où $\mathbb{N}$ est de degré $\ell^{s_n'}$ sur $\mathbb{Q}$, et étudions la structure relative de son anneau d'entiers . Prolongeant un résultat établi par J. Cougnard pour les extensions métacycliques (cf. [Co 2] et [Co 3]) , nous pouvons énoncer :

Théoreme III.8. Etant donnée une extension métabélienne $\mathbb{N}$, de degré $\ell^{s_n'}$ sur le corps des rationnels et composée directe d'une extension abélienne et d'une extension métacyclique , le tensorisé $\mathfrak{A}_{\mathbb{N}}/\mathfrak{A}_{\mathbb{N}^{s-1}} = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{A}_{\mathbb{N}}/\mathbb{A}_{\mathbb{N}^{s-1}})$ du quotient de son anneau d'entiers par celui de sa sous-extension d'indice ℓ , est isomorphe , en tant que module sur l'algèbre $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$ du groupe de Galois , à la somme directe :

$$\mathfrak{A}_{\mathbb{N}}/\mathfrak{A}_{\mathbb{N}^{s-1}} \simeq \mathbb{Z}_{\ell}[G']/\nu_s \mathbb{Z}_{\ell}[G'] \simeq \bigoplus_{\varphi} e_{\varphi} \mathfrak{R}^s ,$$

où e_{φ} parcourt un système complet d'idempotents irréductibles du centre R de G' , et $\mathfrak{R}^s$ désigne l'algèbre croisée $\mathbb{Z}_{\ell}[\zeta, T]$ construite sur l'anneau cyclotomique des racines $\ell^{s-ièmes}$ de l'unité .

Pour établir ce résultat , nous nous appuierons sur le lemme :

Lemme III.10 [Co 2] .

Soient $\mathbb{N}$ une extension cyclique d'ordre premier ℓ , sauvagement ramifiée sur un corps local K , puis π une uniformisante de $\mathbb{N}$, et t le saut de ramification . L'idéal $\pi^t \mathbb{A}_{\mathbb{N}}$ se décompose comme somme directe de $\mathbb{A}_K$ -modules :

$$\pi^t \mathbb{A}_{\mathbb{N}} = \pi^t \mathbb{A}_K \oplus (1 - \sigma) \mathbb{A}_{\mathbb{N}} ,$$

pour tout $\sigma \neq 1$ du groupe de Galois .

Démonstration :

L'extension N/K étant totalement ramifiée par hypothèse , l'anneau de valuation discrète A_N est engendré sur A_K par les puissances de l'uniformisante, ce qui s'écrit $A_N = A_K[\pi] = \bigoplus_{k=0}^{\ell-1} A_K \pi^k$.

Or , par définition de la suite de ramification , nous pouvons écrire :

$(1-\sigma)\pi = \alpha\pi^{t+1}$, pour un α inversible de A_N ;
d'où $(1-\sigma)\pi^k \equiv k\alpha\pi^{t+k} \pmod{\pi^{t+k+1}}$, pour tout $k > 0$; ce qui entraîne la relation attendue $\pi^t A_N = \bigoplus_{k=0}^{\ell-1} \pi^{t+k} A_K \subset \pi^t A_K \oplus (1-\sigma)A_N$.

§ 2 . Démonstration du théorème : Distinguons deux cas suivant la ramification :

Lorsque l'extension cyclique N/K est modérément ramifiée , l'anneau des entiers A_N est localement libre en ℓ sur l'algèbre $\mathbb{Z}[G']$, en vertu du théorème III.1 . En particulier nous avons donc :

$$\mathfrak{U}_N/\mathfrak{U}_{N^{s-1}} \simeq \mathbb{Z}_\ell[G']/\nu_s \mathbb{Z}_\ell[G'] \simeq \bigoplus_{\varphi} e_{\varphi} \mathbb{R}^s ,$$

et le théorème est vérifié dans ce cas .

Supposons donc l'extension cyclique N/K sauvagement ramifiée , et notons t le dernier saut de ramification . D'après les résultats de structure du chapitre II (théorème II.4) , pour tout idempotent central irréductible e_{φ} , le quotient $e_{\varphi}(\mathfrak{U}_N/\mathfrak{U}_{N^{s-1}})$ est un $\mathbb{R}^s$ -module de rang 1 , isomorphe comme tel , à une somme directe :

$$e_{\varphi}(\mathfrak{U}_N/\mathfrak{U}_{N^{s-1}}) \simeq e_{\varphi} \bigoplus_{k=1}^n \mathfrak{R}^{i_{\varphi k}} ;$$

et notre assertion sera établie si nous montrons que les indices $i_{\varphi k}$ parcourent toutes les classes résiduelles modulo n lorsque k décrit $\{1, \dots, n\}$.

Introduisons pour ce faire l'opérateur $\delta_s = 1 - \sigma^{\ell^{s-1}}$ et formons les quotients :

$$\mathfrak{B}_{\varphi} = e_{\varphi} \left[\mathfrak{U}_N / (\mathfrak{U}_{N^{s-1}} + \delta_s \mathfrak{U}_N) \right] \simeq e_{\varphi} \bigoplus_{k=1}^n \mathfrak{R}^{i_{\varphi k}} / \mathfrak{R}^{i_{\varphi k} + \ell^{s-1}} .$$

En tant que $\mathbb{F}_{\ell}[T']$ -module , les quotients $\mathfrak{B}_{\varphi}$, se décomposent en somme directe :

$$\mathfrak{B}_{\varphi} = e_{\varphi} \left[\left(\bigoplus_{k=1}^{(\ell^{s-1}-1)/n} \mathbb{F}_{\ell}[T] \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^n \mathbb{F}_{\ell} \bar{e}_{\chi} \iota_{\varphi^k} \right) \right] .$$

De sorte que la condition sur les indices ι_{φ^k} exprime que le module $\mathfrak{B} = \bigoplus_{\varphi} \mathfrak{B}_{\varphi}$ est libre sur l'algèbre $\mathbb{F}_{\ell}[T']$. Or, en vertu du lemme précédent appliqué à l'extension N/N^{s-1} , nous pouvons écrire :

$$\mathfrak{B} = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} \left[A_N / (A_{N^{s-1}} + \delta_s A_N) \right] = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} \left[A_N / (A_{N^{s-1}} + \mathfrak{p}^t) \right] ,$$

en désignant par t le saut de ramification de ℓ dans l'extension N/N^{s-1} , et par $\mathfrak{p}$ le produit dans A_N des idéaux premiers au-dessus de ℓ .

Notons $\mathfrak{p}_{s-1} = \mathfrak{p} \cap A_{N^{s-1}}$ la trace de l'idéal $\mathfrak{p}$ dans l'anneau

$A_{N^{s-1}}$; puis $\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cap A_L$ et $\mathfrak{p}_{s-1} = \mathfrak{p}_{s-1} \cap A_{L^{s-1}}$

Puisque l'extension N/N^{s-1} est totalement ramifiée en $\mathfrak{p}$, nous obtenons :

$$\mathfrak{B} = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} \left[(A_N / \mathfrak{p}^t) / (A_{N^{s-1}} / \mathfrak{p}_{s-1}^t) \right] .$$

Le théorème résulte alors de la décomposition de $\mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} (A_N / \mathfrak{p}^t)$ (respectivement $\mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} (A_{N^{s-1}} / \mathfrak{p}_{s-1}^t)$) comme $\mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} (A_L / \mathfrak{p})[T']$ (respectivement $\mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} (A_{L^{s-1}} / \mathfrak{p}_{s-1})[T']$)-module (cf. [Co 4]). Le calcul explicite de cette structure fait l'objet du théorème III.9 (cf. infra).

Corollaire [Co 3].

Soit N une extension métacyclique de degré $\ell^s n$ sur le corps des rationnels. Le quotient $A_N / A_{N^{s-1}}$ est un module libre de rang 1 sur l'algèbre $\Lambda^s = \mathbb{Z}[\zeta, T]$.

Démonstration :

Cela résulte du théorème III.7 et du théorème III.8.

Remarque.

Ce résultat serait en défaut si nous avions considéré le noyau $A_N^{\star}$ de l'opérateur trace v_s , plutôt que le quotient $A_N / A_{N^{s-1}}$, quoique ces deux modules aient même invariant global.

§ 3. Considérons pour nous en convaincre le cas où N est une extension métabélienne de degré $\ell n'$ sur $\mathbb{Q}$, et notons G' son groupe de Galois.

D'après le théorème II.5 , le tensorisé $\mathfrak{U}_N = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} A_N$ de l'anneau des entiers est $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -isomorphe à une somme directe :

$$\mathfrak{U}_N \simeq \bigoplus_{\varphi} \left[\left(\bigoplus_{k=1}^{x_{\varphi}} \mathfrak{g}^{\iota_{\varphi k}} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=x_{\varphi}+1}^{y_{\varphi}} \Xi^{\iota_{\varphi k}} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=y_{\varphi}+1}^n \Gamma^{\iota_{\varphi k}} \right) \right] .$$

Dans cette décomposition , le sous-module $\mathfrak{U}_K = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} A_K$, engendré par les entiers de K , et le quotient $\mathfrak{U}_N/\mathfrak{U}_K$ sont respectivement représentés par les sommes :

$$\mathfrak{U}_K \simeq \bigoplus_{\varphi} \bigoplus_{k=x_{\varphi}+1}^n \Gamma^{\iota_{\varphi k}} \quad \text{et} \quad \mathfrak{U}_N/\mathfrak{U}_K \simeq \bigoplus_{\varphi} \bigoplus_{k=1}^{y_{\varphi}} \mathfrak{g}^{\iota_{\varphi k}} ;$$

de sorte que les indices $\iota_{\varphi k}$ parcourent toutes les classes résiduelles modulo n , lorsque k décrit indifféremment $\{1, \dots, y_{\varphi}\}$ ou $\{x_{\varphi}+1, \dots, n\}$. Autrement dit , nous obtenons :

$$\mathfrak{U}_K = \bigoplus_{\varphi} \left[\left(\bigoplus_{i \in I_{\varphi}} \Xi^{\iota_i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in J_{\varphi}} (\mathfrak{g}^{\iota_i} \oplus \Gamma^{\iota_i}) \right) \right] ,$$

pour une partition convenable $I_{\varphi} \cup J_{\varphi}$ de $\{1, \dots, n\}$.

Plus précisément , nous avons :

Théoreme III.9. Soit $N/\mathbb{Q}$ une extension métabélienne de degré $\ell n'$ sur le corps des rationnels , composée directe d'une extension abélienne et d'une extension métacyclique . Notons t la longueur de la suite des groupes de ramification de ℓ dans N/K , et T'_1 le groupe d'inertie dans $K/\mathbb{Q}$; désignons par ψ le caractère de la représentation unité de T'_1 , par χ celui de l'action de T' sur le groupe S , et par $\tilde{\psi}$ celui de l'action de T'_1 sur une uniformisante locale π de K au-dessus de ℓ .

Alors le tensorisé $\mathfrak{U}_N = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} A_N$ de l'anneau des entiers de N s'écrit comme somme directe des $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -modules indécomposables :

$$\mathfrak{U}_N \simeq \bigoplus_{\varphi} \left[\left(\bigoplus_{i \in I_{\varphi}} \Xi^{\iota_i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \in J_{\varphi}} (\mathfrak{g}^{\iota_i} \oplus \Gamma^{\iota_i}) \right) \right] ,$$

où $I_{\varphi} \cup J_{\varphi}$ est la partition de $\{1, \dots, n\}$ définie par :

$$I_{\varphi} = \left\{ i \in \{1, \dots, n\} \mid \langle \varphi \chi^{\iota_i} , \left(\sum_{k=0}^{t-1} \tilde{\psi} \right) \psi \rangle = 0 \right\} .$$

Démonstration :

Dans la décomposition de $\mathfrak{U}_N$ en facteurs indécomposables , le quotient $H^2(S, \mathfrak{U}_N) = \mathfrak{U}_K / \text{Tr}(\mathfrak{U}_N)$ est donné par la somme directe $\mathfrak{U}_K / \text{Tr}(\mathfrak{U}_N) = \bigoplus_{i \in J_{\varphi}} \Gamma^{\iota_i} / \ell \Gamma^{\iota_i}$.

Désignons par $\mathfrak{P}$ l'image dans $\mathfrak{A}_K$ du produit des idéaux premiers de K qui sont au-dessus de ℓ . D'après [CL] (Ch.V § 3, lemme 4) l'image par l'application trace de l'anneau $\mathfrak{A}_N$ est l'idéal :

$$\text{Tr}(\mathfrak{A}_N) = \mathfrak{P}^{[(t+1)\frac{\ell-1}{\ell}]} = \mathfrak{P}^t.$$

Introduisons le corps d'inertie K_1 de ℓ dans l'extension abélienne $K/\mathbb{Q}$ et notons $\mathfrak{A}_1$ le tensorisé de son anneau d'entiers. L'idéal $\mathfrak{P}$ est étendu de $\mathfrak{A}_1$, de sorte que par abus de notations, nous pouvons écrire :

$$\mathfrak{A}_K / \text{Tr}(\mathfrak{A}_N) = \mathfrak{A}_K / \mathfrak{P}^t = \mathfrak{A}_1 / \mathfrak{P}^t = \bigoplus_{k=0}^{t-1} \mathfrak{P}^k / \mathfrak{P}^{k+1},$$

pour la structure de $\mathbb{F}_\ell[T']$ -module.

Le quotient $\mathfrak{A}_1 / \mathfrak{P}$ est isomorphe à $\mathbb{F}_\ell[T' / T'_1]$, et pour tout idempotent $e_{\varphi\chi^i}$ de $\mathbb{Z}_\ell[T']$, le choix d'une uniformisante dans chacun des

facteurs premiers de $\mathfrak{P}$ dans Λ_1 définit un isomorphisme de $\mathbb{F}_\ell$ -espace vectoriel de $e_{\varphi\chi^i}[\mathfrak{A}_1 / \mathfrak{P}]$ sur $e_{\varphi\chi^i} \tilde{\mathfrak{P}}^k / \tilde{\mathfrak{P}}^{k+1}$; d'où le résultat annoncé.

Corollaire 1. Sous les hypothèses du théorème, l'ordre $\mathfrak{O}_N$ de $\mathfrak{A}_N$ dans $\mathbb{Q}_\ell[G']$ est engendré sur $\mathbb{Z}_\ell[G']$ par les idempotents $\frac{\nu}{\ell} e_{\varphi\chi^i}$, pour $i \in J_\varphi$.
Il est isomorphe à $\mathfrak{A}_N$.

Démonstration :

Considérons l'ordre $\mathfrak{O}'_N$ de $\mathbb{Q}_\ell[G']$ engendré sur $\mathbb{Z}_\ell[G']$ par les idempotents $\frac{\nu}{\ell} e_{\varphi\chi^i}$, pour $i \in J_\varphi$.

Nous avons immédiatement :

$$\frac{\nu}{\ell} e_{\varphi\chi^i}[\mathfrak{A}_N] = \frac{\nu}{\ell} e_{\varphi\chi^i}[e_\varphi(\mathfrak{A}^i \oplus \Gamma_i)] = e_\varphi \Gamma_i; \text{ de sorte que } \mathfrak{O}_N \text{ contient } \mathfrak{O}'_N.$$

Le résultat résulte alors de la décomposition

$e_\varphi[\Xi_i + \frac{\nu}{\ell} \Gamma_i] \simeq e_\varphi[\mathfrak{A}^i \oplus \Gamma_i]$ qui nous prouve que $\mathfrak{O}'_N$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_N$; autrement dit, que $\mathfrak{A}_N$ est libre sur $\mathfrak{O}'_N$.

Corollaire 2 . Dans une extension métacyclique N de degré ℓn sur le corps des rationnels , l'anneau des entiers est localement libre sur l'ordre associé .

Démonstration :

Compte-tenu du corollaire précédent , il nous reste à vérifier que pour tout nombre premier p distinct de ℓ , l'anneau $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A_N$ est libre sur l'ordre qui lui est associé dans $\mathbb{Q}_p[G]$. Or , nous avons la décomposition directe :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A_N &\simeq \left[\left(\frac{\nu - \ell}{\ell} \right) \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A_N \right] \oplus \left[\frac{\nu}{\ell} \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A_N \right] \simeq \\ &\simeq [\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} (A_N/A_K)] \oplus [\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A_K] \end{aligned}$$

et le premier terme est libre sur $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ (corollaire au théorème III.8) et le second sur l'ordre associé dans $\mathbb{Z}_p[T']$, en vertu du théorème de Leopoldt (théorème III.3) .

Ce dernier résultat tombe en défaut , lorsque N est une extension métacyclique de degré $\ell^s n$, avec $s > 1$ (cf. [Ber] , Ch.IV § 3, exemple 3) .

CHAPITRE IV

GROUPES DE ℓ -CLASSES D'IDEAUX

Soient N un corps de nombres algébriques de degré fini , et A_N l'anneau de ses entiers . Il est bien connu que les idéaux principaux de A_N , engendrés par les éléments non nuls de N , forment un sous-groupe d'indice fini dans le groupe D_N des idéaux fractionnaires non nuls de l'anneau de Dedekind A_N . Et on a pu écrire que le groupe des classes $\mathcal{C}_N = D_N / P_N$ constitue l'invariant le plus important concernant l'arithmétique de A_N .

Le problème se présente alors de déterminer le nombre de classes d'idéaux du corps N , et plus généralement, de préciser la structure du groupe $\mathcal{C}_N$.

Lorsque le corps N est une extension normale de l'un de ses sous-corps H , ce problème se pose de façon naturelle en termes d'algèbre de groupe : En effet , le groupe de Galois $G = \text{Gal} (N/H)$ opère sur les idéaux fractionnaires de N , de sorte que le groupe des classes $\mathcal{C}_N$ est canoniquement un module sur l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G]$.

La structure galoisienne de $\mathcal{C}_N$ s'exprime dans un certain nombre d'invariants numériques faisant intervenir des sous-groupes (formule des ℓ -classes ambiges) ou des quotients remarquables (formule des genres) du groupe des classes . Une façon de les atteindre consiste alors à rechercher des relations entre le groupe des classes de N et ceux de ses sous-corps : du fait de leur degré moindre , l'arithmétique de ces derniers est en effet plus accessible aux méthodes effectives .

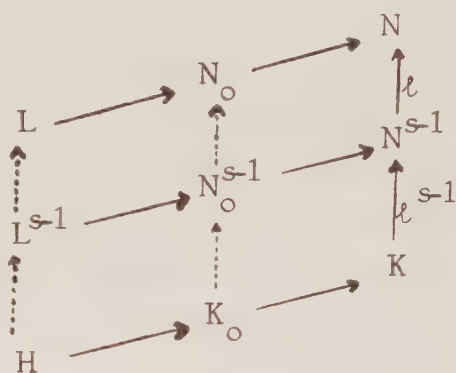
1. DESCRIPTION DES GROUPES DE ℓ -CLASSES D'IDEAUX .

Désignons par H un corps de nombres algébriques de degré fini sur $\mathbb{Q}$, et par N une extension normale sur H , de groupe de Galois G' métabélien et d'ordre $\ell^s n'$.

§ 1. Pour tout corps de nombres Ω , convenons de noter $\mathfrak{K}_{\Omega}$ le groupe des ℓ -classes d'idéaux , c'est-à-dire l'unique ℓ - sous- groupe de Sylow du groupe des classes d'idéaux de l'anneau des entiers de Ω .

Nous nous proposons ici de mettre en place un certain nombre de définitions qui vont nous permettre de préciser la structure galoisienne du groupe $\mathfrak{K}_N$.

Introduisons pour cela une sous-extension abélienne K_0 de K/H ; notons N_0 l'extension composée $L.K_0$ et, plus généralement, pour tout $t = 0, \dots, s$ désignons par N_0^t l'unique sous-corps de N_0 qui est de degré ℓ^t sur K_0 .



Pour utiliser les techniques de dévissage décrites au chapitre II , nous devons introduire des modules relatifs , i.e. annulés par l'opérateur norme $v_s = 1 + \sigma \ell^{s-1} + \dots + \sigma(\ell-1)\ell^{s-1}$. Il est naturel de faire appel pour cela à l'application norme au sens habituel .

Definition 1 . Etant donné un sous-corps N_0 de N contenant L , nous appelons **groupe des ℓ -classes relatives du corps N_0** , et nous noterons $\mathfrak{K}_{N_0}^*$, le noyau dans $\mathfrak{K}_{N_0}$ de la norme naturelle du groupe $\mathcal{C}l_{N_0}$ dans le groupe $\mathcal{C}l_{N^{s-1}}$.

Il est clair que les groupes $\mathfrak{K}_N$ et $\mathfrak{K}_N^*$, qui sont annulés par une puissance de ℓ , sont canoniquement des modules multiplicatifs sur l'algèbre $\mathbb{Z}_{\ell}[G]$. Nous les noterons exponentiellement comme modules à droite , c'est-à-dire avec la convention :

$$a^{\eta\tau} = (a^{\eta})^{\tau} , \text{ pour tous } \eta, \tau \text{ de } G .$$

A tout caractère ℓ -adique ψ du groupe T , correspond alors un sous-module $\mathfrak{K}_{\psi}$ du groupe $\mathfrak{K}_N$:

Definition 2. Pour tout caractère ℓ -adique ψ du groupe abélien T' , nous désignons par groupe des ψ -classes du corps N , l'image par l'idempotent $e_\psi = \frac{1}{n'} \sum_{\tau \in T'} \psi(\tau^{-1}) \tau$ du groupe des ℓ -classes $\mathfrak{H}_N$. Nous écrivons $\mathfrak{H}_N^\psi$ pour $\mathfrak{H}_N^{e_\psi}$.

Proposition IV.1. Soient N_0 un sous-corps de N au-dessus de L , et T'_0 le sous-groupe de T' qui lui correspond par la théorie de Galois.

(i) Pour tout $t = 0, \dots, s$ le groupe des ℓ -classes $\mathfrak{H}_{N^t}$ s'injecte dans le groupe $\mathfrak{H}_{N^t}$ et l'application norme N_{N^t/N_0^t} induit une surjection de $\mathfrak{H}_{N^t}$ sur $\mathfrak{H}_{N_0^t}$.

(ii) Le groupe $\mathfrak{H}_{N_0^t}$ s'identifie canoniquement au sous-groupe $\mathfrak{H}_{N^t}^{\psi_{T'_0}}$ associé au caractère $\psi_{T'_0}$ de T' induit par le caractère unité de T'_0 .

Démonstration :

Notons $\psi_{T'_0}$ le caractère de T' induit du caractère unité du sous-groupe T'_0 , puis n'_0 l'ordre (premier à ℓ) de T'_0 et $e_0 = \frac{1}{n'_0} \sum_{\tau \in T'_0} \tau$, l'idempotent associé par la proposition II.4. Puisque, par hypothèse, N_0 est le corps des invariants de T'_0 , pour tout t

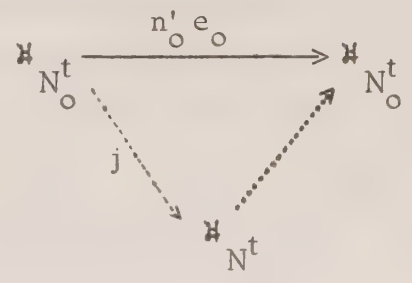
de $[0, s]$ l'application $a \mapsto a^{n'_0 e_0}$ dans $\mathfrak{H}_{N_0^t}$

est l'automorphisme d'élévation à la puissance n_0 .

Introduisant l'application naturelle j de $\mathfrak{H}_{N_0^t}$

dans $\mathfrak{H}_{N^t}$, nous en déduisons que l'application

$\frac{1}{n_0} N_{N^t/N_0^t}$ est un projecteur de $\mathfrak{H}_{N^t}$ sur $\mathfrak{H}_{N_0^t}$ au-dessus de j .



Scolie. Le groupe $\mathfrak{H}_{N_0^t}$ s'identifie à la somme directe $\oplus \mathfrak{H}_{N^t}^\psi$ prise sur le sous-groupe des caractères irréductibles du groupe T' , qui sont triviaux sur T'_0 ; ce que nous écrivons : $\mathfrak{H}_{N_0^t} \simeq \sum_{\psi \in (T/T'_0)^*} \mathfrak{H}_{N^t}^\psi$, pour tout $t = 1, \dots, s$.

Démonstration :

Il suffit d'écrire $\psi_{T'_0}$ comme somme de caractères irréductibles .

Une façon d'interpréter la proposition IV.1 consiste à dire que les groupes de ℓ -classes d'idéaux vérifient la théorie de Galois relativement à T' . En effet , pour tout sous-groupe T'_0 de T' , le groupe des ℓ -classes du sous-corps de N^t fixé par T'_0 n'est autre que le sous-groupe de $\mathfrak{H}_{N^t}$ des ℓ -classes invariantes par T'_0 .

Remarquons par ailleurs que , le groupe T' n'étant pas distingué dans G' , les groupes de ℓ -classes $\mathfrak{H}_{N^t_0}$, non plus que les groupes de ψ -classes $\mathfrak{H}^\psi_{N^t}$, ne sont en général des sous-modules de $\mathfrak{H}_{N^t}$ pour sa $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -structure . Une condition suffisante pour qu'un groupe $\mathfrak{H}_{N^t_0}$ soit un $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -module , est évidemment que N^t_0 soit une sous-extension galoisienne de N^t/H ; mais cette dernière condition n'est nullement nécessaire .

§ 3 . Pour illustrer ce point , introduisons la filtration canonique du groupe $\mathfrak{H}_{N^t}$, qui a été définie au chapitre II.5 : Notons $\delta = 1 - \sigma$, pour un générateur σ de S , et posons :

$$\mathfrak{H}_k(N^t) = \{ a \in \mathfrak{H}_{N^t} \mid a^{\delta^k} = 1 \} , \text{ pour tout } t = 1, \dots, s \text{ et tout } k \in \mathbb{N} .$$

D'après la proposition II.11 , les $(\mathfrak{H}_k(N^t))_{k \in \mathbb{N}}$ forment une filtration croissante exhaustive de $\mathfrak{H}_{N^t}$ constituée de $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -modules .

Définition 3 . Pour tout caractère ψ de T' , nous appelons groupe des ψ -classes ambiges du corps N^t , l'image par l'idempotent e_ψ du groupe $\mathfrak{H}_1(N^t)$, des ℓ -classes d'idéaux de N^t invariantes par σ , et nous écrivons $\mathfrak{H}^\psi_1(N^t)$.

En particulier , si N^t_0 est le corps des invariants dans N^t d'un sous-groupe T'_0 de T' , nous écrivons $\mathfrak{H}_1(N^t_0)$ pour $\mathfrak{H}^{\psi_{T'_0}}_1(N^t)$.

Cette définition étend aux sous-extensions non galoisiennes de N^t/H , la notion habituelle de classes ambiges relativement au groupe

$\text{Gal}(N^t/K)$: Il est immédiat , d'après la proposition IV.1 , que , lorsque T'_0 est distingué dans G' , i.e. quand l'extension N^t_0 est cyclique sur son sous-corps K_0 , le groupe $\mathfrak{H}_1(N^t_0)$ s'identifie au sous-groupe de $\mathfrak{H}_{N^t_0}$ qui est fixé par $\text{Gal}(N^t_0/K_0)$, c'est-à-dire au groupe des ℓ -classes ambiges au sens habituel .

De façon semblable :

Definition 4 . Pour tout caractère ψ de T' , nous appelons ψ -groupe des genres de l'extension N^t/K , l'image par l'idempotent e_ψ du quotient $\mathcal{G}(N^t) = \mathfrak{H}_{N^t} / \mathfrak{H}^\delta_{N^t}$.

Nous écrivons $\mathcal{G}(N^t_0)$ pour $\mathcal{G}(N^t)^{\psi_{T_0}}$, si N^t_0 est le sous - corps de N^t fixé par T'_0 .

Les groupes de genres , tout comme les groupes de ℓ -classes ambiges , fournissent une première approche du groupe des ℓ -classes .

En particulier :

Proposition IV.2. Si N^t_0 est une sous-extension galoisienne de N^t/H , au des - sus de L^t , les groupes $\mathfrak{H}_{N^t_0}$, $\mathfrak{H}_1(N^t_0)$ et $\mathcal{G}(N^t_0)$ s'annulent simultanément.

Démonstration :

Puisque N^t_0 est supposé galoisien sur H , le groupe $\mathfrak{H}_{N^t_0}$ est un $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -module . Cela étant , l'égalité $\mathcal{G}(N^t_0) = 1$ s'écrit $\mathfrak{H}_{N^t_0} = \mathfrak{H}^\delta_{N^t_0}$, c'est-à-dire , puisque $\mathfrak{H}_{N^t_0}$ est fini , $\mathfrak{H}_1(N^t_0) = 1$. De sorte que les groupes $\mathfrak{H}_1(N^t_0)$ et $\mathcal{G}(N^t_0)$, qui ont même ordre , s'annulent simultanément .

Or , supposons $\mathfrak{H}_{N^t_0}$ non réduit à 1 . Il contient alors une

classe non triviale a , d'ordre ℓ , vérifiant par suite la relation :

$a^{\delta^{\ell^s}} = 1$. Si donc k est le plus petit entier pour lequel nous avons

$a^{\delta^{k+1}} = 1$, il est clair que a^{δ^k} est une classe non nulle, ambige et d'ordre ℓ . Autrement dit, nous venons d'établir que $\mathfrak{H}_{N^t_0} \neq 1$ entraîne

$\mathfrak{H}_1(N^t_0) \neq 1$; ce qui achève la démonstration .

Ajoutons que la proposition tombe en défaut, lorsque N_O^t n'est pas galoisienne sur H .

Remarque . De la congruence $v_s \equiv \ell \pmod{\delta Z_\ell[G']}$, il suit que les classes ambiges relatives sont nécessairement d'ordre ℓ . Les classes relatives d'ordre ℓ qui ne sont pas ambiges sont dites exceptionnelles. En l'absence de telles classes, toute classe relative est une classe ambige.

2. FORMULE DES CLASSES AMBIGES DANS LES EXTENSIONS METACYCLIQUES.

Nous nous proposons d'étendre ici, aux groupes de ψ -classes, la formule due à Chevalley, donnant l'ordre du groupe des classes ambiges dans une extension cyclique relative [Ch]. De telles généralisations ont déjà été données par G. Gras [Gr 2] et R. Gillard [Gi], pour des extensions cycliques, abéliennes sur un sous-corps du corps de base.

§ 1. Pour étudier les groupes de ψ -classes en tant que Z_ℓ -modules, nous pouvons faire opérer l'anneau Z_ℓ sur les groupes d'idéaux par extension des scalaires, c'est-à-dire en nous plaçant dans le module $\mathfrak{D} = Z_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} D_N$, tensorisé du groupe des idéaux fractionnaires de N .

C'est ainsi que nous utilisons les sous-modules :

$\mathfrak{D}_a$ des idéaux des classes ambiges,	$\mathfrak{P}$ des idéaux principaux,
$\mathfrak{D}_1$ des idéaux ambiges,	$\mathfrak{P}_1$ des idéaux principaux ambiges,
$\mathfrak{D}_O$ des idéaux étendus de K ,	$\mathfrak{P}_O$ des idéaux principaux étendus,
$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}_O \cap \mathfrak{P}$ " la capitulation ",	$\mathfrak{P}^*$ des idéaux principaux de norme 1.

De même, posons $\mathfrak{E} = Z_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_N$, tensorisé du groupe des unités du corps N .

Nous notons :

$\mathfrak{C}^*$ le noyau de la norme $v = N_{N/K}$, $\mathfrak{E}_O$ le sous-module des unités de K .

Nous écrivons enfin $\mathfrak{N}$ pour $Z_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} N$.

Introduisons alors quelques notations. Les groupes qui interviennent étant tous ℓ -primaires nous raisonnons non sur leurs ordres, mais sur les ℓ -valuations de ces ordres. C'est ainsi, qu'en convenant d'affecter d'un indice ψ les termes correspondant à la ψ -composante, nous écrivons :

- h pour la valuation du groupe des classes de N , i.e. $\ell^h_\psi = |\mathfrak{H}^\psi_N|$;
 h^* pour la valuation du groupe des classes relatives $\mathfrak{H}^*_N$;
 ρ pour la valuation du groupe des classes ambiges $\mathfrak{H}_1(N)$;
 ρ^* pour la valuation du groupe des classes ambiges relatives
 $\mathfrak{H}^*_1(N) = \mathfrak{H}_1(N) \cap \mathfrak{H}^*_N$;
 $\tilde{\rho}$ pour la valuation du groupe des genres $\mathfrak{Q}(N) = \mathfrak{H}_N / \mathfrak{H}^\delta_N$;
 $\tilde{\rho}^*$ pour la valuation du groupe des genres relatifs $\mathfrak{Q}^*(N) = \mathfrak{H}^*_N / \mathfrak{H}^{\star\delta}_N$;
 π pour la valuation du groupe des classes d'idéaux ambiges $\mathfrak{D}_1 / \mathfrak{P}$;
 c pour la valuation du groupe des classes des idéaux induits $\mathfrak{D}_0 / \mathfrak{E}$;
 k pour la valuation du groupe des classes de K , i.e. $\ell^k_\psi = |\mathfrak{H}^\psi_o|$;
 r pour la valuation du quotient $\mathfrak{D}_1 / \mathfrak{D}_0$;
 w pour la valuation du groupe de défaut $\mathfrak{E}_o / \mathfrak{E}_o \cap \text{Norme}_{N/K}(\mathfrak{N})$;
 p pour la valuation du quotient $\mathfrak{E}_o / \mathfrak{E}^\vee = H^2(S, \mathfrak{E})$;
 q pour la valuation du quotient $\mathfrak{E}^* / \mathfrak{E}^\delta = H^1(S, \mathfrak{E})$.

§ 2 . Pour évaluer la valuation ρ_ψ de la ψ -composante du groupe des classes ambiges, pour un caractère ψ du groupe T' , les méthodes mises en oeuvre dans le cas abélien consistent à atteindre le groupe $\mathfrak{H}^\psi_1$ par une succession de suites exactes de $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -modules. En effet, de toute telle suite :

$$\dots \rightarrow \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C} \rightarrow \dots$$

nous déduisons les suites $\dots \rightarrow \mathfrak{A}^\psi \rightarrow \mathfrak{B}^\psi \rightarrow \mathfrak{C}^\psi \rightarrow \dots$, qui sont exactes, pour chaque caractère ψ de T' .

En particulier, nous obtenons ici :

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 1 &\longrightarrow (\mathfrak{E}_o \cap N(\mathfrak{N}) / \mathfrak{E}^\vee)^\psi \longrightarrow (\mathfrak{E}_o / \mathfrak{E}^\vee)^\psi \longrightarrow (\mathfrak{E}_o / \mathfrak{E}_o \cap N(\mathfrak{N}))^\psi \longrightarrow 1 \\
 (2) \quad 1 &\longrightarrow (\mathfrak{E} / \mathfrak{P}_o)^\psi \longrightarrow (\mathfrak{D}_o / \mathfrak{P}_o)^\psi \longrightarrow (\mathfrak{D}_o / \mathfrak{E})^\psi \longrightarrow 1
 \end{aligned}$$

Or le groupe G' étant métabélien, certains isomorphismes classiques ne sont pas des isomorphismes de G' -modules. Nous pouvons cependant énoncer :

Proposition IV.3. Désignons par χ le caractère de l'action du groupe T' sur le groupe S , et soit ψ un caractère de T' . Nous avons les isomorphismes de $\mathbb{Z}_\ell$ -modules :

- (i) $\mathfrak{D}^\psi_a / (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{P})^\psi \simeq (\mathfrak{P}^* / \mathfrak{P}^\delta)^\psi \chi \simeq (\mathfrak{E}_o \cap N_{N/K}(\mathfrak{N}) / \mathfrak{E}^\vee)^\psi \chi$, d'une part ;
 (ii) $\mathfrak{P}^\psi_1 / \mathfrak{P}^\psi_o \simeq (\mathfrak{E}^* / \mathfrak{E}^\delta)^\psi \chi$, d'autre part .

Démonstration :

Pour tout idéal $\mathfrak{A}$ de $\mathfrak{D}_a$, l'idéal $\mathfrak{A}^\delta$ est un idéal principal (α) engendré par un élément de norme unité $\epsilon = \alpha^\vee$. L'application $\mathfrak{A} \xrightarrow{\partial} \epsilon \pmod{\mathfrak{E}^\vee}$ est donc un $\mathbb{Z}_\ell$ -morphisme de $\mathfrak{D}_a/\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{E}_0 \cap N(\mathfrak{N})/\mathfrak{E}^\vee$ qui est surjectif en vertu du théorème 90 de Hilbert pour les idéaux ([Hi], th.90), et qui a pour noyau le groupe $\mathfrak{D}_1\mathfrak{P}/\mathfrak{P}$ des classes des idéaux ambiges, isomorphe à $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{P}_1$.

D'où un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell$ -modules : $\mathfrak{D}_a/\mathfrak{D}_1\mathfrak{P} \simeq \mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^\delta \simeq \mathfrak{E}_0 \cap N(\mathfrak{N})/\mathfrak{E}^\vee$. L'isomorphisme $\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^\delta \simeq \mathfrak{E}_0 \cap N(\mathfrak{N})/\mathfrak{E}^\vee$, est compatible avec la $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -structure, ce qui donne :

$$(\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^\delta)^\psi \simeq (\mathfrak{E}_0 \cap N(\mathfrak{N})/\mathfrak{E}^\vee)^\psi, \text{ pour tout caractère } \psi.$$

Par contre, la congruence $e_{\psi\chi}^\delta \equiv \delta e_\psi \pmod{\delta^2 \mathbb{Z}_\ell[G']}$ dans l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G']$, donnée par la proposition II.5, se traduit par la relation $e_{\psi\chi}^\partial = \partial e_\psi$ sur les opérateurs ; d'où :

$$(\mathfrak{D}_a/\mathfrak{D}_1\mathfrak{P})^\psi \simeq (\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^\delta)^\psi \chi, \text{ qui est l'isomorphisme annoncé.}$$

De façon semblable, pour tout idéal ambige (α) de $\mathfrak{P}_1$, l'élément α^δ est une unité ϵ de N , de norme 1 sur K . Réciproquement, nous savons, par le théorème 90 de Hilbert ([Hi], th.90) que tout élément ϵ de N de norme 1 sur K s'écrit $\epsilon = \alpha^\delta$ pour un α convenable de N .

L'application $\partial | (\alpha) \mapsto \alpha^\delta \pmod{\mathfrak{E}^\vee}$ est donc un $\mathbb{Z}_\ell$ -isomorphisme de $\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_0$ sur $\mathfrak{E}^*/\mathfrak{E}^\delta$. La même congruence que plus haut, conduit alors à l'isomorphisme :

$$(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{P}_0)^\psi \simeq (\mathfrak{E}^*/\mathfrak{E}^\delta)^\psi \chi.$$

Proposition IV.4. Etant donné un caractère ψ du groupe T' , il existe une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell$ -modules :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{E}^\psi/\mathfrak{P}_0^\psi \longrightarrow \mathfrak{P}_1^\psi/\mathfrak{P}_0^\psi \longrightarrow \mathfrak{D}_1^\psi/\mathfrak{D}_0^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}_1^\psi/(\mathfrak{D}_0^\psi/\mathfrak{E}^\psi) \xrightarrow{\partial} (\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^\delta)^\psi \chi \longrightarrow 1.$$

Démonstration :

D'après la proposition IV.3, la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{P}^\psi \longrightarrow \mathfrak{D}^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}^\psi \longrightarrow 1$$

donne lieu à la suite exacte de cohomologie :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{P}_1^\psi \longrightarrow \mathfrak{D}_1^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}_1^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}^1(S, \mathfrak{P}_1^\psi) \longrightarrow 1,$$

dans laquelle l'identité $H^1(S, \mathfrak{D}_1^\psi) = 1$ traduit le théorème 90 de Hilbert, et où le premier groupe de cohomologie $H^1(S, \mathfrak{P}_1^\psi)$ s'identifie au quotient $(\mathfrak{P}^*/\mathfrak{P}^\delta)^\psi \chi$.

Formons la suite exacte du serpent associée au diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & \mathfrak{P}_0^\psi & \longrightarrow & \mathfrak{D}_0^\psi & \longrightarrow & \mathfrak{H}_0^\psi \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow i \\
 1 & \longrightarrow & \mathfrak{P}_1^\psi & \longrightarrow & \mathfrak{D}_1^\psi & \longrightarrow & \mathfrak{H}_1^\psi \longrightarrow H^1(S, \mathfrak{P}_1^\psi) \longrightarrow 1
 \end{array}$$

Nous obtenons la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \text{Ker } i \longrightarrow \mathfrak{P}_1^\psi / \mathfrak{P}_0^\psi \longrightarrow \mathfrak{D}_1^\psi / \mathfrak{D}_0^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}_1^\psi / \text{Im } i \xrightarrow{\partial} H^1(S, \mathfrak{P}_1^\psi) \longrightarrow 1,$$

qui est bien la suite proposée .

§ 3 . Nous sommes désormais en mesure d'énoncer :

Theoreme IV.1 : Formule des classes ambiges .

Pour tout caractère ψ du groupe abélien T' , l'ordre de la ψ -composante du groupe des ι -classes ambiges du corps N est donné par la relation :

$$|\mathfrak{H}_1^\psi| = |\mathfrak{H}_0^\psi| \frac{[\mathfrak{D}_1^\psi : \mathfrak{D}_0^\psi]}{[\mathfrak{E}_0^\psi \chi : (\mathfrak{E}_0 \cap N(\mathfrak{H}))^\psi \chi]} \frac{[\mathfrak{E}_0^\psi \chi : \mathfrak{E}^{\psi \chi}]}{[\mathfrak{E}^{* \psi \chi} : \mathfrak{E}^{\delta \psi \chi}]}$$

Autrement dit , nous avons :

$$\rho_\psi = k_\psi + r_\psi - w_{\psi \chi} + p_{\psi \chi} - q_{\psi \chi} .$$

Démonstration :

Ecrivons que la somme alternée des valuations est nulle, dans la suite exacte donnée par la proposition IV.4 . Nous obtenons immédiatement :

$$(k_\psi - c_\psi) - q_{\psi \chi} + r_\psi - (\rho_\psi - c_\psi) + (p_{\psi \chi} - w_{\psi \chi}) = 0 ;$$

ce qui conduit à la relation annoncée .

Dans cette formule, le terme $\frac{[\mathfrak{E}_0^\psi \chi : \mathfrak{E}^{\psi \chi}]}{[\mathfrak{E}^{* \psi \chi} : \mathfrak{E}^{\delta \psi \chi}]} = \frac{|H^2(S, \mathfrak{E})^{\psi \chi}|}{|H^1(S, \mathfrak{E})^{\psi \chi}|}$

n'est pas un véritable quotient de Herbrand .

En effet , comme nous l'avons remarqué, la $\psi \chi$ -composante du groupe des unités $\mathfrak{E}$ n'est pas en général un sous- $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -module , de sorte que le calcul de la différence $p_\psi - q_\psi$ nécessite la connaissance de la G' -structure de $\mathfrak{E}$.

La détermination de l'indice r_ψ n'offre , par contre , aucune difficulté dès que la ramification est connue .

Proposition IV.5. Le quotient $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}_0$ se décompose comme somme directe de $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -modules :

$$\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}_0 \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}} e_{\chi_{\mathfrak{p}}} \left(\mathbb{Z}_\ell / \ell^{e_{\mathfrak{p}}} \mathbb{Z}_\ell \right) [T'] ,$$

où $\mathfrak{p}$ décrit l'ensemble des idéaux premiers de H , qui se ramifient dans l'extension N/K ; l'exposant $e_{\mathfrak{p}}$ est celui de l'indice de ramification dans N/K ; et $\chi_{\mathfrak{p}}$ est le caractère induit de la représentation unité du sous - groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$ dans l'extension K/H .

Démonstration :

Le groupe $\mathfrak{D}_1$ des idéaux ambiges du corps N est engendré par le sous-groupe $\mathfrak{D}_0$ des idéaux étendus de K , et par les produits $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{P}} \mathfrak{p}$,

où $\mathfrak{P}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de K qui se ramifient dans N .

Si donc nous notons $\mathcal{J}$ le $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -module engendré par ces produits , il est clair que nous avons un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -modules : $\mathcal{J} \simeq \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mu_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell[T']$; où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux premiers de H qui se ramifient dans N/K , et $\mu_{\mathfrak{p}}$ désigne l'opérateur de $\mathbb{Z}_\ell[T']$ correspondant à la norme $N_{K/D_{\mathfrak{p}}}$ sur le sous-corps de décomposition de $\mathfrak{p}$.

Exprimant $\mu_{\mathfrak{p}}$ en termes de caractères , et passant au quotient nous obtenons la proposition .

Corollaire . Pour tout caractère ψ de T' , l'indice r_{ψ} est donné par la relation :

$$r_{\psi} = \sum_{\mathfrak{p}} \langle \psi , \chi_{\mathfrak{p}} \rangle e_{\mathfrak{p}} ,$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers de H , ramifiés dans N/K .

Contrairement au cas abélien , il semble plus délicat de donner ici , composantes par composantes , une décomposition du nombre de ψ -classes ambiges en produit d'entiers significatifs .

La suite exacte de la proposition IV.4 conduit cependant aux majorations :

Scolie . On a : $q_{\psi\chi} \leq (k_{\psi} - c_{\psi}) + r_{\psi}$ qui donne $\rho_{\psi} \geq c_{\psi} + p_{\psi\chi} - w_{\psi\chi}$; et la quantité $k_{\psi} - c_{\psi}$ mesure la ψ -capitulation .

3 . SUITE EXACTE DU GROUPE DES GENRES .

Pour obvier à la difficulté signalée ci-dessus , une méthode possible est de substituer à l'étude du sous-groupe ambige $\mathfrak{H}_1$, celle du quotient $\mathfrak{H} / \mathfrak{H}^\delta$, d'ordre identique , mais non isomorphe . Nous conser -
vons les notations du paragraphe 2 .

§ 1 . Désignons par $\mathfrak{f}$ un multiple convenable du conducteur de l'extension N/K , invariant par T' , et contenant à un ordre suffisant les mêmes diviseurs premiers (ce qui est possible puisque , le corps N étant normal sur H , toute place conjuguée par T' d'une place K ramifiée dans N , est aussi ramifiée) . Notons $K^\mathfrak{f}$ le groupe multiplicatif des éléments de K étrangers à $\mathfrak{f}$; puis $N^\mathfrak{f}$ son homologue dans N ; et $E_K^\mathfrak{f}$ le rayon modulo $^*\mathfrak{f}$, i.e. :

$$E_K^\mathfrak{f} = \{ x \in K^\mathfrak{f} \mid x \equiv 1 \pmod{^*\mathfrak{f}} \} .$$

Nous savons par la théorie des genres que le quotient $K^\mathfrak{f} / N_{N/K}(N^\mathfrak{f}) E_K^\mathfrak{f}$ est un groupe d'ordre fini , égal à ι^r . Plus précisé -
ment , nous pouvons énoncer :

Proposition IV.6. En tant que $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -module , le quotient $K^\mathfrak{f} / N_{N/K}(N^\mathfrak{f}) E_K^\mathfrak{f}$ s'écrit comme somme directe :

$$K^\mathfrak{f} / N_{N/K}(N^\mathfrak{f}) E_K^\mathfrak{f} = \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}} \left[\prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}} [K^\mathfrak{p} / N_{N/K}(N^\mathfrak{p}) E_K^{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}] \right] = \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}} \bigoplus_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}} E_{K_\mathfrak{p}} / N(E_{N_\mathfrak{p}}) ;$$

où $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ désigne la $\mathfrak{p}$ -partie du conducteur .

Dans cette décomposition , le groupe T' agit sur le produit des groupes d'unités locales $E_{K_\mathfrak{p}}$ par la relation : $(\alpha_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}^\tau = (\alpha_{\mathfrak{p}^\tau - 1}^\tau)_\mathfrak{p}$, pour tout τ de T' .

Démonstration :

Pour tout élément α de $K^\mathfrak{f}$ et tout diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{f}$ dans K , le théorème d'approximation simultanée nous assure d'un élément $\alpha_\mathfrak{p}$ de $K^\mathfrak{p}$ satisfaisant aux congruences multiplicatives :

$$\alpha_\mathfrak{p} \equiv \alpha \pmod{^*\mathfrak{f}_\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad \alpha_\mathfrak{p} \equiv 1 \pmod{^*\mathfrak{f}/\mathfrak{f}_\mathfrak{p}} .$$

Il est bien connu (cf. par exemple [Ha]) que l'application $\alpha \mapsto (\alpha_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$ définit un isomorphisme du quotient $K^\mathfrak{f} / N(N^\mathfrak{f}) E_N^\mathfrak{f}$ sur le produit

$\bigoplus_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{f}} \left[\prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}} (K^\mathfrak{p} / N(N^\mathfrak{p}) E_K^{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}) \right]$. C'est un isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -modules

si nous convenons de définir une action de T' par $(\alpha_p)_p^\tau = (\alpha_p^{\tau-1})_p$.

Enfin, si K_p désigne le complété de K pour la valuation p -adique, et N_p l'un des complétés de N au-dessus de K_p , il existe un isomorphisme canonique de $K^p/N_{N/K}(N^p) E_K^p$ sur $E_{K_p}/N(E_{N_p})$; ce qui achève la démonstration.

Corollaire. Pour tout caractère ψ du groupe T' , l'indice r_ψ est précisément la valuation de la $\psi\chi$ -composante du $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -module $K^f/N_{N/K}(N^f) E_K^f$.

Démonstration :

Le calcul de l'ordre $|[K^f/N_{N/K}(N^f) E_K^f]^{e_{\psi\chi}}|$ résulte immédiatement de l'isomorphisme donné par la proposition IV.6, la quantité $[E_{K_p} : N(E_{N_p})]$ étant bien connue. Comme les unités de K qui sont dans $N(N^f) E_K^f$ sont précisément les normes locales, l'inclusion canonique $E_K/E_K \cap N_{N/K}(N) \hookrightarrow K^f/N_{N/K}(N^f) E_K^f$ nous donne la majoration annoncée.

§ 2. L'inégalité obtenue peut être améliorée pour tenir compte de la formule du produit de Hasse. Introduisons pour cela le ℓ -corps de classes de Hilbert de N , i.e. la plus grande ℓ -extension $\hat{N}$ abélienne et non ramifiée sur N . Le groupe de Galois $\text{Gal}(\hat{N}/N)$ s'identifie à $\mathfrak{H}_N$ par l'isomorphisme de réciprocité d'Artin, et $\hat{N}$ est une ℓ -extension galoisienne de K . En particulier, lorsque N/K est totalement ramifiée, le groupe $\text{Gal}(\hat{N}/K)$ s'écrit comme produit semi-direct de $S = \text{Gal}(N/K)$ et de $\mathfrak{H} \simeq \text{Gal}(\hat{N}/N)$ avec les relations :

$$\eta a = a^\eta \eta, \quad \text{pour tous } \eta \text{ de } S \text{ et } a \text{ de } \mathfrak{H}.$$

Nous obtenons dans ce cas $[\sigma a] = \sigma a \sigma^{-1} a^{-1} = a^{\sigma-1} = a^\delta$.

Notons $\tilde{N}$ le ℓ -corps de genres de l'extension N/K , i.e. la plus grande ℓ -extension abélienne de K , qui est non ramifiée sur N . Le corps $\tilde{N}$ est la sous-extension de $\hat{N}$ fixée par le sous-groupe des commutateurs $[\text{Gal}(\hat{N}/K), \text{Gal}(\hat{N}/K)] = \mathfrak{H}^\delta$, de sorte que le groupe de Galois $\text{Gal}(\tilde{N}/K)$ est une extension du groupe S par le groupe des genres $\mathcal{G} = \mathfrak{H}/\mathfrak{H}^\delta$.

Pour chaque idéal premier p de K , qui se ramifie dans N/K , désignons par I_p son groupe d'inertie dans l'extension $\tilde{N}/K$.

Nous sommes alors en mesure d'énoncer :

Proposition IV.7. Etant donnée une extension cyclique N d'un corps de nombres K , il existe une suite exacte canonique :

$$1 \longrightarrow E_K / E_K \cap N_{N/K}(N) \xrightarrow{\text{Hasse}} \bigoplus_p I_p \xrightarrow{\text{Proj}} \text{Gal}(\tilde{N}/K) \xrightarrow{\text{Tr}_{\tilde{N}/\tilde{K}}} \mathfrak{H}_K \longrightarrow 1$$

Démonstration :

La première application est obtenue en associant à toute unité de K , les symboles de Hasse $\left(\frac{\epsilon}{p}\right)_p$ relatifs aux idéaux premiers p de K qui se ramifient dans N/K .

Considérons alors l'injection canonique $\epsilon \mapsto (\alpha_p)_p$ de $E_K / E_K \cap N_{N/K}(N)$ dans $\prod_p K^p / N(N^p) E_K^{\mathcal{J}^p}$. Le symbole de Hasse $\left(\frac{\epsilon}{p}\right)_p$ n'est autre que le symbole d'Artin $((\alpha_p), \tilde{N}/K)$, de sorte que l'application $\mathfrak{h} | \epsilon \mapsto \left(\frac{\epsilon}{p}\right)_p$ est injective comme composée d'une injection et d'un isomorphisme.

Cela étant, pour tout ϵ de E_K , l'image $\prod_p \left(\frac{\epsilon}{p}\right)_p$ de $\mathfrak{h}(\epsilon)$ par la projection canonique de $\prod_p I_p$ dans $\text{Gal}(\tilde{N}/K)$, est nulle en vertu de la formule du produit. Tandis que le sous-groupe de $\text{Gal}(\tilde{N}/K)$ engendré par les I_p est très précisément le groupe $\text{Gal}(\tilde{N}/\tilde{K})$ associé par la théorie de Galois au $\mathfrak{t}$ -corps de classes de Hilbert $\tilde{K}$ du corps K . Son corps des invariants est en effet une sous-extension maximale de $\tilde{N}$, non ramifiée sur K .

Le groupe de Galois $\text{Gal}(\tilde{N}/K)$ est une extension du groupe $S = \text{Gal}(N/K)$ par le groupe des genres $\mathfrak{G} \simeq \text{Gal}(\tilde{N}/N)$ qui est un produit direct dès que l'extension N/K est totalement ramifiée. Son quotient $\text{Gal}(\tilde{K}/K)$ s'identifie au groupe $\mathfrak{H}_K$ par l'isomorphisme de réciprocité d'Artin.

Il resterait à montrer que tout élément $(\sigma_p)_p$ de $\prod_p I_p$ vérifiant la formule du produit $\prod \sigma_p = 1$, provient par le symbole de Hasse d'une unité de K . C'est là un résultat classique de la théorie du corps de classes, qui résulte ici de l'identité d'Euler-Poincaré :

$$0 = w - r + (\rho + s) - k,$$

donnée par la formule des classes ambiges $([Ch])$.

L'exactitude de la suite est donc établie.

§ 3 . Or , puisque l'extension N est galoisienne sur le sous-corps H , les différents termes de la suite exacte précédente sont canoniquement des $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -modules : Il suffit alors de faire opérer le groupe T' sur le produit des groupes d'inertie $\bigoplus_p I_p$, par la relation : $(\sigma_p)^\tau = (\sigma_p^{\tau-1})_p$ pour obtenir :

Theoreme IV.2 : Formule des genres .

Etant donnée une extension métabélienne N d'un corps de nombres H , la suite exacte des genres est compatible avec la $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -structure pour l'action de T' sur le produit $\bigoplus_p I_p$ transportée de celle sur $K^f/N_{N/K}(N^f)E_K^f$. En particulier , pour tout caractère ψ du groupe T' , l'ordre de la ψ -composante du groupe des genres est donné par la relation :

$$|\mathcal{G}^\psi| = |\mathfrak{H}_O^\psi| \frac{|[K^f/N(N^f)E_K^f]^\psi|}{|[\mathfrak{G}_O/\mathfrak{G}_O \cap N(\mathfrak{N})]^\psi|} \ell^{-s\langle\psi, \chi\rangle} .$$

Autrement dit , nous avons :

$$\tilde{\rho}_\psi = k_\psi + r_{\psi\chi} - 1 - w_\psi - s\langle\psi, \chi\rangle .$$

Démonstration :

Pour tout caractère ψ du groupe T' , la suite exacte des genres s'écrit :

$$1 \longrightarrow (E_K/E_K \cap N_{N/K}(N))^\psi \longrightarrow (\bigoplus_p I_p)^\psi \longrightarrow \text{Gal}(\tilde{N}/K)^\psi \longrightarrow \mathfrak{H}_K^\psi \longrightarrow 1$$

tandis que le groupe $\text{Gal}(\tilde{N}/K)^\psi$ est déterminé par la suite courte :

$$1 \longrightarrow \mathcal{G}^\psi \longrightarrow \text{Gal}(\tilde{N}/K)^\psi \longrightarrow S^\psi \longrightarrow 1 ,$$

où le groupe T' opère sur S par automorphismes intérieurs .

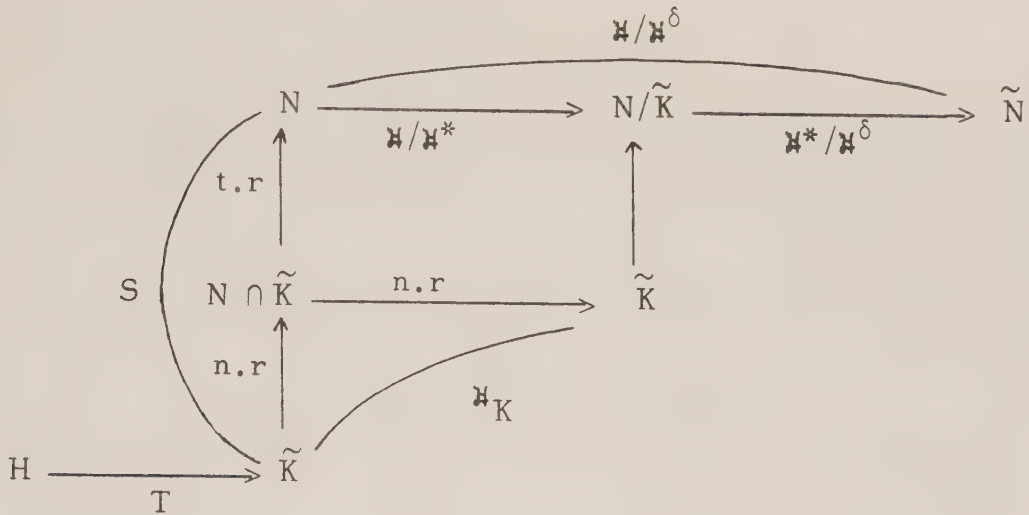
D'où la formule annoncée , en exprimant les ordres de chaque groupe .

Corollaire . Désignons par $\mathfrak{H}^*$ le noyau dans le groupe des classes $\mathfrak{H}$ de la norme naturelle $N_{N/K}$, et soit $\ell^t = [N:N \cap \tilde{K}]$ l'indice dans N de la sous-extension maximale de N qui est non ramifiée sur K . Alors , pour tout caractère ψ de T' , la quantité $r_{\psi\chi} - 1 - w_\psi - t\langle\psi, \chi\rangle$ est exactement la valuation du quotient $[\mathfrak{H}^*/\mathfrak{H}^\delta]^\psi$.

En particulier nous avons la majoration : $w_\psi \leq r_{\psi\chi} - 1 - t\langle\psi, \chi\rangle$.

Démonstration :

Par l'isomorphisme de réciprocité d'Artin , le sous- groupe $\mathfrak{H}^*/\mathfrak{H}^\delta$ s'identifie en effet au groupe de Galois $\text{Gal}(\tilde{N}/N\tilde{K})$ dont l'ordre est connu .



Scolie .

Lorsque le groupe G' est abélien , c'est-à-dire lorsque le groupe T' agit trivialement sur S , le nombre de ψ -classes ambiges est égal à la ψ -partie du nombre de genres . Il vient alors :

$$\frac{|H^1(S, \mathfrak{G}^\psi)|}{|H^2(S, \mathfrak{G}^\psi)|} = \ell^{s \langle \psi, 1_{T'} \rangle} ,$$

où $1_{T'}$ est le caractère de la représentation unité .

Il suffit en effet d'identifier la formule des genres avec celle des classes ambiges pour obtenir l'égalité : $q_\psi - p_\psi = s \langle \psi, 1_{T'} \rangle$. Nous retrouvons dans ce cas la valeur donnée dans [Gr 2] .

Il est clair cependant , et bien que le nombre de genres coïncide globalement avec le nombre de classes ambiges , qu'il n'y a plus en général égalité entre ρ_ψ et $\tilde{\rho}_{\psi\chi}$, dès que le groupe G n'est pas abélien . Nous allons voir , au contraire , que la distribution des écarts $\rho_\psi - \tilde{\rho}_{\psi\chi}$ est significative .

4. FORMULE DU NOMBRE DE CLASSES DANS LES EXTENSIONS METABELIENNES .

Dans [Mo 2] , N. Moser établit , à partir de l'interprétation de la fonction ζ d'un corps de nombres comme produit de fonctions L d'Artin , une formule liant le nombre de classes d'une extension normale sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps quadratique imaginaire , les nombres de classes de certains de ses sous-corps , et un indice d'unités , lorsque le groupe de Galois est métacyclique d'ordre $2n$. Une généralisation de cette formule aux extensions de Frobenius sur un corps de nombres arbitraire , a été donnée par C.D. Walter dans [Wa] .

Notre propos est ici de montrer comment la théorie des genres conduit à une formule analogue pour les groupes de ψ -classes d'une extension métabélienne .

§ 1 . Dans tout ce qui suit , nous désignons donc par N une extension métabélienne d'un corps de nombres H , et nous supposons désormais que le groupe de Galois $G' = \text{Gal}(N/H)$ est composé direct de son centre R et d'un groupe métacyclique G .

Pour tout idempotent e_φ de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G']$, associé à un caractère irréductible φ du centre de G' (cf. prop. II.5) , le groupe des φ -classes relatives $\mathfrak{H}_N^{\star\varphi}$ est un $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module fini annulé par l'opérateur norme $v_s = v(\sigma^{\ell^{s-1}})$, donc un $\mathbb{R}^s$ -module de torsion , auquel nous pouvons appliquer le théorème II.4 . Nous obtenons :

Théoreme IV.3. Soient N une extension métabélienne d'un corps de nombres H , composée directe d'une extension abélienne et d'une extension métacyclique , et φ un caractère du groupe de Galois G' , trivial sur le sous-groupe métacyclique G , provenant d'un caractère irréductible du centre .

(i) Le groupe des φ -classes relatives du corps N s'écrit :

$$\mathfrak{H}_N^{\star\varphi} \simeq e_\varphi \left[\bigoplus_h \mathfrak{g}^{\alpha_h} / \mathfrak{g}^{\beta_h} \right] ,$$

comme somme directe finie essentiellement unique de $\mathbb{R}^s$ -modules indécomposables .

(ii) Dans cet isomorphisme , le sous-groupe ambige est :

$$\mathfrak{H}_1^{\star\varphi}(N) \simeq e_\varphi \left[\bigoplus_h \mathfrak{g}^{\beta_h-1} / \mathfrak{g}^{\beta_h} \right] ,$$

tandis que la φ -composante du groupe des genres relatifs vaut :

$$\mathfrak{G}^{\star\varphi}(N) \simeq e_\varphi \left[\bigoplus_h \mathfrak{g}^{\alpha_h} / \mathfrak{g}^{\alpha_h+1} \right] .$$

(iii) Et, pour tout entier $i = 1, \dots, n$, la $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -composante isotypique associée au caractère $\varphi\chi^i$ est donnée par la décomposition :

$$\mathfrak{H}_N^{\star\varphi\chi^i} \simeq e_{\varphi}^{\vartheta^i} \left[\bigoplus_h \mathfrak{R}_0 / \mathfrak{S}_0^{[(\beta_h - i - 1)/n] - [\alpha_h - i - 1]/n} \right] .$$

Démonstration :

La décomposition du groupe des φ -classes relatives $\mathfrak{H}_N^{\star\varphi}$ est celle que donne le théorème II.4. Rappelons que $\mathfrak{S}$ désigne l'idéal maximal de l'anneau cyclotomique $\mathbb{Z}_\ell[\zeta]$ des racines $\ell^{s-ièmes}$ de l'unité ; ϑ la somme de Gauss $e_\chi(\zeta) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \rho^{-h} \zeta^{\rho^h}$; et $\mathfrak{S}_0$ l'idéal maximal du sous-anneau $\mathfrak{R}_0$ d'indice n dans $\mathfrak{R} = \mathbb{Z}_\ell[\zeta]$.

La décomposition de $\mathfrak{H}_1^{\star\varphi}$ et de $\mathfrak{H}^{\star\varphi}/\mathfrak{H}^{\star\delta\varphi}$ n'offrant pas de difficulté, montrons comment s'obtiennent les composantes isotypiques : de l'isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -modules $\mathfrak{R} = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \vartheta^j \mathfrak{R}_0$, nous déduisons la dé-

composition isotypique $\mathfrak{S}^\alpha = \bigoplus_{j=0}^{n-1} \vartheta^{\alpha+j} \mathfrak{R}_0$, dans laquelle le terme $\vartheta^{\alpha+j} \mathfrak{R}_0$ correspond au caractère $\chi^{\alpha+j}$. Et il suffit alors de passer au quotient pour obtenir la formule annoncée.

Corollaire 1. Les ℓ -rangs des groupes de $\varphi\chi^i$ -classes relatives du corps N sont liés à celui du groupe de φ -classes ambiges relatives par la majoration :

$$\text{rg}_\ell \left(\mathfrak{H}_N^{\star\varphi\chi^i} \right) \leq \frac{\ell-1}{n} \ell^{s-1} \dim_{\mathbb{F}_\ell} \left(\mathfrak{H}_1^{\star\varphi}(N) \right) .$$

En particulier :

$$\text{rg}_\ell \left(\mathfrak{H}_N^{\star\varphi} \right) \leq (\ell-1) \ell^{s-1} \dim_{\mathbb{F}_\ell} \left(\mathfrak{H}_1^{\star\varphi}(N) \right) .$$

Démonstration :

Considérons un $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -module relatif isotypique et indécomposable : $\mathfrak{M} = e_{\varphi}^{\vartheta} (\mathfrak{R} / \mathfrak{S}_0^k)$.

Nous avons immédiatement $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^\ell = e_{\varphi}^{\vartheta^i} \left(\mathfrak{R} / \mathfrak{S}_0^{\inf \left\{ k, \frac{\ell-1}{n} \ell^{s-1} \right\}} \right)$; ce qui nous donne $\text{rg}_\ell(\mathfrak{M}) = \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^\ell) = \inf \left\{ k, \frac{\ell-1}{n} \ell^{s-1} \right\}$.

Le corollaire s'obtient donc en sommant sur toutes les composantes indécomposables dans la décomposition de chacun des modules isotypiques $\mathfrak{H}^{\star \varphi \chi^1}(N)$.

Notons que le résultat obtenu vaut pour les groupes de ℓ -classes relatives des sous-corps de N contenant L , compte-tenu de la proposition IV.1.

Corollaire 2 : Formule des classes relatives.

Pour tout idempotent central e_{φ} de l'algèbre $\mathbb{Z}_{\ell}[G']$, le nombre de φ -classes relatives du corps N est donné par la relation :

$$h_{\varphi}^{\star} - n h_{\varphi \chi^0}^{\star} = \bigoplus_{i=1}^n \left(\rho_{\varphi \chi^{i-1}}^{\star} - \tilde{\rho}_{\varphi \chi^i}^{\star} \right).$$

En particulier, lorsque φ provient du caractère unité d'un sous-groupe R_0 de R , la formule précédente relie le nombre de ℓ -classes relatives du sous-corps L_0 de N fixé par $R_0 T$, et celui de sa clôture galoisienne, fixée par R_0 .

Démonstration :

Il suffit évidemment d'établir la formule lorsque $\mathfrak{H}_N^{\star}$ est un $\mathbb{Z}_{\ell}[G']$ -module indécomposable : $e_{\varphi} \mathfrak{g}^{\alpha} / \mathfrak{g}^{\beta}$. Auquel cas, nous obtenons l'égalité :

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i=1}^n \left(\rho_{\varphi \chi^{i-1}}^{\star} - \tilde{\rho}_{\varphi \chi^i}^{\star} \right) &= \left(\beta - n \left[\frac{\beta+n-1}{n} \right] \right) - \left(\alpha - n \left[\frac{\alpha+n-1}{n} \right] \right) = \\ &= (\beta - \alpha) - n \left(\left[\frac{\beta+n-1}{n} \right] - \left[\frac{\alpha+n-1}{n} \right] \right), \end{aligned}$$

qui conduit à la relation attendue, d'après le théorème IV.3 (iii).

§ 2. La formule des classes relatives fait intervenir les nombres $\rho_{\varphi \chi^i}^{\star}$ et $\tilde{\rho}_{\varphi \chi^i}^{\star}$, quantités plus difficiles à atteindre que leurs homologues $\rho_{\varphi \chi^i}$ et $\tilde{\rho}_{\varphi \chi^i}$, qui ont été calculés plus haut.

Il est cependant légitime d'espérer étendre ce résultat au groupe des classes tout entier.

Introduisons pour cela le sous-corps métabélien N^{s-1} d'indice ℓ dans $N = N^s$, et distinguons deux cas, suivant que l'extension cyclique N^s / N^{s-1} est ramifiée ou non.

Remarque IV.8 . Lorsque l'extension cyclique N^S/K est ramifiée , l'application norme $N_{N^S/N^{S-1}}$ donne lieu à une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -modules :

$$(3) \quad 1 \longrightarrow \mathfrak{H}_{N^S}^* \longrightarrow \mathfrak{H}_{N^S} \xrightarrow{\text{Norme}} \mathfrak{H}_{N^{S-1}} \longrightarrow 1 ,$$

puis , par restriction et passage au quotient , aux suites :

$$(4) \quad 1 \longrightarrow (\mathfrak{H}_{N^S}^* \cap \mathfrak{H}_{N^S}^\delta) / \mathfrak{H}_{N^S}^{*\delta} \longrightarrow \mathcal{Q}^*(N^S) \longrightarrow \mathcal{Q}(N^S) \xrightarrow{\text{Norme}} \mathcal{Q}(N^{S-1}) \longrightarrow 1$$

$$(5) \quad 1 \longrightarrow \mathfrak{H}_1^*(N^S) \longrightarrow \mathfrak{H}_1(N^S) \xrightarrow{\text{Norme}} \mathfrak{H}_1(N^{S-1}) \rightarrow \mathfrak{H}_1(N^{S-1}) / N(\mathfrak{H}_1(N^S)) \rightarrow 1$$

De plus , si $\tilde{\mathfrak{H}}_{N^S}$ désigne le sous-groupe ${}^{-1}\delta(\mathfrak{H}_{N^S}^*)$ du groupe des ℓ -classes $\mathfrak{H}_{N^S}$, l'application norme induit un $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -isomorphisme :

$$\left[\tilde{\mathfrak{H}}_{N^S} / \mathfrak{H}_{N^S}^* \mathfrak{H}_1(N^S) \right]^{\varphi_X^i} \simeq \left[\mathfrak{H}_1(N^{S-1}) / N(\mathfrak{H}_1(N^S)) \right]^{\varphi_X^i} ,$$

tandis que l'opérateur δ détermine un $\mathbb{Z}_\ell$ -isomorphisme :

$$\left[\tilde{\mathfrak{H}}_{N^S} / \mathfrak{H}_{N^S}^* \mathfrak{H}_1(N^S) \right]^{\varphi_X^i} \simeq \left[\mathfrak{H}_{N^S}^* \cap \mathfrak{H}_{N^S}^\delta / \mathfrak{H}_{N^S}^{*\delta} \right]^{\varphi_X^{i+1}} .$$

Démonstration :

L'extension cyclique N^S/K étant ramifiée par hypothèse , l'extension d'ordre premier N^S/N^{S-1} est totalement ramifiée , et nous savons par la théorie du corps de classes que tout idéal de N^{S-1} est équivalent à un idéal qui est norme . Autrement dit, nous obtenons la suite (3), et il est clair que c'est là une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -modules . Nous en déduisons immédiatement (4) et (5) , l'une par passage au quotient , l'autre par restriction .

Introduisant le sous-groupe $\tilde{\mathfrak{H}}_{N^S}$, nous pouvons remarquer que toute classe de $\mathfrak{H}_1(N^{S-1})$ provient par l'application norme , d'une classe de $\tilde{\mathfrak{H}}_{N^S}$, ce qui se traduit par l'isomorphisme de $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -modules :

$$\tilde{\mathfrak{H}}_{N^S} / \mathfrak{H}_{N^S}^* \mathfrak{H}_1(N^S) \simeq \mathfrak{H}_1(N^{S-1}) / N(\mathfrak{H}_1(N^S)) ;$$

cependant que l'opérateur δ envoie biunivoquement le quotient $\tilde{\mathfrak{H}}_{N^S} / \mathfrak{H}_{N^S}^* \mathfrak{H}_1(N^S)$ sur le quotient $\mathfrak{H}_{N^S}^* \cap \mathfrak{H}_{N^S}^\delta / \mathfrak{H}_{N^S}^{*\delta}$, et agit sur les $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -composantes isotypiques conformément à la congruence :

$$e_{\varphi_X^{i+1}\delta} \equiv \delta e_{\varphi_X^i} \pmod{\delta^2 \mathbb{Z}_\ell[G']} , \text{ donnée par la proposition II.5 .}$$

Lemma IV.9 . Lorsque , par contre , l'extension N^S/K n'est pas ramifiée , la suite exacte des classes s'écrit :

$$(3') \quad 1 \longrightarrow \mathfrak{H}_{N^S}^\star \longrightarrow \mathfrak{H}_{N^S} \xrightarrow{\text{Norme}} \mathfrak{H}_{N^{S-1}} \longrightarrow \text{IF}_\ell \bar{e}_\chi \longrightarrow 1$$

Les classes relatives sont alors contenues dans le genre principal , ce qui s'écrit $\mathfrak{H}_{N^S}^\star \subset \mathfrak{H}_{N^S}^\delta$, ou

$$(4') \quad 1 \longrightarrow \mathfrak{C}(N^S) \xrightarrow{\text{Norme}} \mathfrak{C}(N^{S-1}) \longrightarrow \text{IF}_\ell \bar{e}_\chi \longrightarrow 1 .$$

Enfin , si $\tilde{\mathfrak{H}}_{N^S}$ désigne le sous-groupe $^{-1}_\delta(\mathfrak{H}_{N^S}^\star)$ du groupe des ℓ -classes $\mathfrak{H}_{N^S}$, il existe une suite exacte :

$$(5') \quad 1 \longrightarrow \mathfrak{H}_{N^S}^\star \longrightarrow \tilde{\mathfrak{H}}_{N^S} \xrightarrow{\text{Norme}} \mathfrak{H}_1(N^{S-1}) \longrightarrow \text{IF}_\ell \bar{e}_\chi \longrightarrow 1 .$$

Démonstration :

En effet , si l'extension N^S/N^{S-1} n'est pas ramifiée , la théorie du corps de classes nous assure l'existence d'un idéal $\mathfrak{a}$ dont la classe dans $\mathfrak{H}_{N^{S-1}}$ ne contient aucun idéal non principal qui est norme . Plus précisément , par l'isomorphisme de réciprocité d'Artin , le quotient $\mathfrak{H}_{N^{S-1}}/N(\mathfrak{H}_{N^S})$ s'identifie au groupe de Galois $\text{Gal}(N^S/N^{S-1})$, lequel s'écrit $\text{IF}_\ell \bar{e}_\chi$ en tant que $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -module . D'où la suite exacte (3') .

D'autre part , il est facile de voir que l'idéal $\mathfrak{a}$ ne saurait appartenir au genre principal $\mathfrak{H}_{N^{S-1}}^\delta$; car la relation $\mathfrak{a} \in H_{N^{S-1}}^\delta$ entraînerait l'existence d'un idéal $\mathfrak{b} \notin N(\mathfrak{H}_{N^S})$ vérifiant $\mathfrak{b}^\delta = \mathfrak{a}$, de sorte que le quotient $\mathfrak{H}_{N^{S-1}}/N(\mathfrak{H}_{N^S})$ serait au moins d'ordre ℓ^2 , contrairement à ce qui précède .

Autrement dit , nous obtenons la suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell[G']$ -modules :

$$\mathfrak{C}(N^S) \xrightarrow{\text{Norme}} \mathfrak{C}(N^{S-1}) \longrightarrow \text{IF}_\ell \bar{e}_\chi \longrightarrow 1$$

Or , d'après la formule de Chevalley , le nombre de genres vérifie la relation :

$$\rho(N^S) = k-s = \rho(N^{S-1}) - 1 ,$$

puisque l'extension N^S/K est non ramifiée .

L'application norme est donc injective de $\mathfrak{C}(N^S)$ dans $\mathfrak{C}(N^{S-1})$, ce qui entraîne en particulier $\mathfrak{H}_{N^S}^\star \subset \mathfrak{H}_{N^S}^\delta$.

Evaluons maintenant le quotient

$$|\mathfrak{H}_1(N^{s-1})/N(\mathfrak{H}_1(N^s))| = \frac{|\mathfrak{H}_1(N^{s-1})| |\mathfrak{H}_1^*(N^s)|}{|\mathfrak{H}_1(N^s)|}.$$

Nous obtenons d'une part

$$|\mathfrak{H}_1(N^{s-1})/N(\mathfrak{H}_1(N^s))| = |\mathfrak{H}_1(N^{s-1})/N(\tilde{\mathfrak{H}}_{N^s})| |\mathfrak{Q}^*(N^s)| \text{ compte-tenu des}$$

isomorphismes de groupes :

$$N(\tilde{\mathfrak{H}}_{N^s})/N(\mathfrak{H}_1(N^s)) \simeq \tilde{\mathfrak{H}}_{N^s}/\mathfrak{H}_{N^s}^* \mathfrak{H}_1(N^s) \simeq (\mathfrak{H}_{N^s}^* \cap \mathfrak{H}_{N^s}^\delta)/\mathfrak{H}_{N^s}^{*\delta} = \mathfrak{Q}^*(N^s).$$

D'autre part, de la formule de Chevalley, nous tirons

$$|\mathfrak{H}_1(N^{s-1})| = \ell |\mathfrak{H}_1(N^s)|.$$

Récapitulant ces résultats, nous déduisons l'égalité

$$|\mathfrak{H}_1(N^{s-1})/N(\tilde{\mathfrak{H}}_{N^s})| = \ell, \text{ ce qui nous prouve que le groupe de défaut}$$

$\mathfrak{H}_{N^{s-1}}/N(\mathfrak{H}_{N^s})$ peut être représenté par une classe ambige.

§ 3. Dans l'un et l'autre cas, nous obtenons ainsi :

Theoreme IV.4 : Formule des classes.

Etant donnée une extension métabélienne N d'un corps de nombres H , composée directe d'une extension abélienne et d'une extension métacyclique d'ordre $\ell^s n$, pour tout idempotent central e_φ de l'algèbre $Z_\ell[G']$ du groupe de Galois, le nombre de φ -classes du corps N est donné par la relation :

$$h_\varphi - n h_{\varphi\chi^\circ} = \bigoplus_{i=1}^n i \left(\rho_{\varphi\chi^{i-1}} - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i} \right).$$

Démonstration :

Procédons par récurrence sur la ℓ -valuation s de l'ordre du groupe G' . Remarquons en premier lieu que pour $s = 0$, nous avons bien :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i \left(\rho_{\varphi\chi^{i-1}} - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i} \right) &= \sum_{i=1}^n i \left(k_{\varphi\chi^{i-1}} - k_{\varphi\chi^i} \right) = \left(\sum_{i=1}^n k_{\varphi\chi^{i-1}} \right) - n k_{\varphi\chi^\circ} = \\ &= k_\varphi - n k_{\varphi\chi^\circ}, \end{aligned}$$

qui est la formule annoncée.

Supposons donc que la formule des classes vérifiée jusqu'à l'ordre $(s-1)$ et distinguons deux cas, suivant la ramification :

(i) Lorsque l'extension cyclique N^s/K est ramifiée, nous avons les égalités :

$h_{\varphi}(N^S) = h_{\varphi}(N^{S-1}) + h_{\varphi}^{\star}(N^S)$ et $h_{\varphi\chi^{\circ}}(N^S) = h_{\varphi\chi^{\circ}}(N^{S-1}) + h_{\varphi\chi^{\circ}}^{\star}(N^S)$,
d'après la suite exacte (3) donnée par le lemme IV.8 .

Puis , en déterminant la ℓ -valuation du quotient

$\tilde{H}_{N^S}^{\varphi\chi^{i-1}} / [\tilde{H}_{N^S}^{\star} H_1(N^S)]^{\varphi\chi^{i-1}}$ de deux façons différentes à l'aide du lemme

IV.8 , nous obtenons l'identité :

$$\tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}(N^{S-1}) + \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}^{\star}(N^S) - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}(N^S) = \rho_{\varphi\chi^{i-1}}(N^{S-1}) + \rho_{\varphi\chi^{i-1}}^{\star}(N^S) - \rho_{\varphi\chi^{i-1}}(N^S)$$

puis , en sommant sur i :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i \left(\rho_{\varphi\chi^{i-1}}(N^S) - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}(N^S) \right) &= \sum_{i=1}^n i \left(\rho_{\varphi\chi^{i-1}}(N^{S-1}) - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}(N^{S-1}) \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^n i \left(\rho_{\varphi\chi^{i-1}}^{\star}(N^S) - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}^{\star}(N^S) \right) . \end{aligned}$$

Et , dans le membre de droite de l'égalité , nous reconnaissons :

$h_{\varphi}(N^{S-1}) - n h_{\varphi\chi^{\circ}}(N^{S-1})$ dans le premier terme , d'après l'hypothèse de récurrence ,

$h_{\varphi}^{\star}(N^S) - n h_{\varphi\chi^{\circ}}^{\star}(N^S)$ dans le second , par la formule des classes relatives .

D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i \left(\rho_{\varphi\chi^{i-1}}(N^S) - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}(N^S) \right) &= \left(h_{\varphi}(N^{S-1}) + h_{\varphi}^{\star}(N^S) \right) + \\ &+ n \left(h_{\varphi\chi^{\circ}}(N^{S-1}) + h_{\varphi\chi^{\circ}}^{\star}(N^S) \right) ; \end{aligned}$$

ce qui établit le théorème dans ce cas .

(ii) Lorsque l'extension cyclique N^S/K est non ramifiée , nous avons par contre :

$$h_{\varphi}(N^S) = h_{\varphi}(N^{S-1}) + h_{\varphi}^{\star}(N^S) - \langle \varphi, \chi \rangle$$

et

$$h_{\varphi\chi^{\circ}}(N^S) = h_{\varphi\chi^{\circ}}(N^{S-1}) + h_{\varphi\chi^{\circ}}^{\star}(N^S) ,$$

d'après la suite exacte (3') donnée par le lemme IV.9 .

Puis , reprenant le calcul de la ℓ -valuation du quotient

$\tilde{H}_{N^S}^{\varphi\chi^{i-1}} / [\tilde{H}_{N^S}^{\star} H_1(N^S)]^{\varphi\chi^{i-1}}$, à l'aide du lemme IV.9, nous obtenons dans

ce cas :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}(N^{S-1}) + \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}^{\star}(N^S) - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}(N^S) - \langle \varphi\chi^i, \chi \rangle &= \rho_{\varphi\chi^{i-1}}(N^{S-1}) + \rho_{\varphi\chi^{i-1}}^{\star}(N^S) - \\ &- \rho_{\varphi\chi^{i-1}}(N^S) - \langle \varphi\chi^{i-1}, \chi \rangle ; \end{aligned}$$

puis , en sommant sur i :

$$\sum_{i=1}^n i \left(\rho_{\varphi\chi^{i-1}}(N^S) - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}(N^S) \right) = \sum_{i=1}^n i \left(\rho_{\varphi\chi^{i-1}}(N^{S-1}) - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}(N^{S-1}) \right) + \\ + \sum_{i=1}^n i \left(\rho_{\varphi\chi^{i-1}}^*(N^S) - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}^*(N^S) \right) - \langle \varphi, \chi \rangle ;$$

ce qui s'écrit encore :

$$\sum_{i=1}^n i \left(\rho_{\varphi\chi^{i-1}}(N^S) - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^i}(N^S) \right) = \left(h_{\varphi}(N^{S-1}) - n h_{\varphi\chi^0}(N^{S-1}) \right) + \\ + \left(h_{\varphi}^*(N^S) - n h_{\varphi\chi^0}^*(N^S) \right) - \langle \varphi, \chi \rangle ,$$

où nous reconnaissons la quantité attendue .

Corollaire 1 .

Soient R_0 un sous-groupe du centre R et L_0 le corps des invariants de R_0 dans l'extension N . Alors le nombre de ℓ -classes de la clôture galoisienne N_0 de L_0/H , i.e. de la sous-extension métabélienne de N/H fixée par R_0 , est donné par la relation :

$$h(N_0) - n h(L_0) = \sum_{i=1}^n i \left(\rho_{\chi^{i-1}}(N_0) - \tilde{\rho}_{\chi^i}(N_0) \right) .$$

Corollaire 2 .

Sous les hypothèses du théorème , le nombre de φ -classes du corps N est donné par la relation :

$$h_{\varphi} - n h_{\varphi\chi^0} = \left(k_{\varphi} - n k_{\varphi\chi^0} \right) + \sum_{i=1}^n (i-1) \left(p_{\varphi\chi^i} - q_{\varphi\chi^i} \right) .$$

Cela résulte de la formule des classes ambiges (théorème IV.1) et de la formule des genres (théorème IV.2) . Comme nous l'avons vu , les quantités $p_{\varphi\chi^i} - q_{\varphi\chi^i}$ dépendent de la structure galoisienne du

groupe des unités , mais vérifient cependant la relation

$$\sum_{i=1}^n \left(q_{\varphi\chi^i} - p_{\varphi\chi^i} \right) = s \langle \varphi, 1_R \rangle .$$

5 . RELATION DU MIROIR ET APPLICATION AUX CONDITIONS D'ANNULATION DU GROUPE DES ℓ -CLASSES .

Nous exposons ci-dessous une relation entre les ψ -composantes du groupe des ℓ -classes d'une extension métabélienne . Il ne s'agit pas à proprement parler d'un " spiegelungssatz " au sens de Leopoldt puisque la correspondance entre les caractères n'est involutive que dans le cas diédral . Cependant , tout comme dans l'énoncé classique , l'écart entre les ordres de deux composantes du groupe des ℓ -classes est mesuré par un indice d'unités .

§ 1 . Rappelons que nous avons défini au chapitre II (5 § 1 , scolie de la proposition II.11) un générateur particulier ϑ de l'idéal d'augmentation $\delta \mathbb{Z}_\ell[S]$ de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[S]$.

Theoreme IV.5 : Relation du miroir .

Soit N une extension cyclique de degré ℓ^s sur un corps K , métabélienne sur un sous-corps H . Alors , pour tout caractère ψ du groupe $\text{Gal}(K/H)$, l'opérateur $\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1}) \sigma^{\chi(\tau)}$ de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[S]$ détermine une suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell$ -modules :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{H}_1^\psi(N) \longrightarrow \mathfrak{H}_N^\psi \xrightarrow{\vartheta} \mathfrak{H}_N^{\psi\chi} \longrightarrow \mathcal{Q}^{\psi\chi}(N) \longrightarrow 1 .$$

Démonstration :

C'est immédiat à partir de la relation de commutation :

$$e_{\psi\chi} \vartheta = \vartheta e_\psi , \text{ pour tout caractère } \psi \text{ de } T' .$$

Compte-tenu de la formule des classes ambiges (th. IV.1) et de la formule des genres (théorème II.2) , nous pouvons donc énoncer , en exprimant les ordres des divers modules :

Corollaire 1 . Lorsque ψ parcourt le groupe des caractères de T' , les ψ -composantes du groupe des ℓ -classes $\mathfrak{H}_N$ sont liées par la relation :

$$h_\psi - h_{\psi\chi} = \rho_\psi - \tilde{\rho}_{\psi\chi} = (k_\psi - k_{\psi\chi}) + \left(s \langle \psi\chi, \chi \rangle - q_{\psi\chi} + p_{\psi\chi} \right) .$$

Remarquons que cette dernière formule contient comme cas particulier la formule des classes démontrée plus haut. En effet, si nous désignons par φ un caractère central de T' , puis formons la quantité

$$\sum_{t=1}^n t \left(h_{\varphi\chi^{t-1}} - h_{\varphi\chi^t} \right), \text{ nous obtenons :}$$

$$h_{\varphi} - n h_{\varphi\chi^0} = \sum_{t=1}^n t \left(\rho_{\varphi\chi^{t-1}} - \tilde{\rho}_{\varphi\chi^t} \right);$$

ce qui constitue une seconde démonstration de la formule des classes :

Pour illustrer ce point, donnons un exemple où la quantité $q_{\psi\chi} - p_{\psi\chi} - s \langle \psi\chi, \chi \rangle$ peut être évaluée sans peine :

Corollaire 2. Soient N/H une extension diédrale de degré $2\ell^s$ sur le corps des rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire (distinct de $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ si ℓ vaut 3), L le sous-corps non galoisien de degré ℓ^s et K le sous-corps quadratique. Sous les deux conditions :

- (i) Le nombre de classes de K est premier à ℓ ,
 - (ii) Les idéaux premiers qui se ramifient dans N/K ne sont pas décomposés dans K/H ,
- le nombre de ℓ -classes de N est le carré de celui de L .

Démonstration :

Sous les hypothèses du théorème la relation du miroir s'écrit : $h_{\chi} = h_{\chi^0} - q_{\chi^0}$, et par le scolie du V, 2 § 3 nous avons $q_{\chi^0} \leq r_{\chi} = 0$.

§ 2. Le corollaire 1 ci-dessus donne une relation entre les ordres des groupes de ψ -classes. Le problème se pose de relier les ℓ -rangs de ces groupes.

Par exemple, lorsque N/H est une extension métacyclique d'ordre ℓn , le corollaire 1 au théorème IV.3 nous conduit à la majoration :

$$\text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_L \leq \text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_H + \text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_L^{\star} \leq \text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_H + \frac{\ell-1}{n} \text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_1(N).$$

Nous nous proposons de préciser quelque peu cette inégalité.

Proposition IV.10. Soient H un corps de nombres dont le ℓ -groupe des classes $\mathfrak{H}_H$ est réduit à 1, et N une extension métacyclique de degré ℓn sur H . Le ℓ -rang des classes du sous-corps L est alors majoré par la quantité :

$$\text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_L \leq \frac{\ell-1}{n} \dim_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathfrak{H}_1^{\star}.$$

De plus, sous réserve que le quotient $\mathfrak{H}_1(N)/(\mathfrak{D}_0/\mathbb{C})$ soit isotypique de caractère χ° , la dimension du sous-groupe ambige relatif est donnée par :

$$\dim_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathfrak{H}_1^{\star} = \text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_K + r - \omega - 1.$$

Démonstration :

Puisque, par hypothèse, le groupe $\mathfrak{H}_H$ est trivial, l'opérateur norme ν annule le groupe $\mathfrak{H}_L$; ce qui entraîne les identités :

$$\text{Ker } \ell = \{a \in \mathfrak{H}_L \mid a^{\ell} = 1\} = \{a \in \mathfrak{H}_L \mid a^{\delta^{\ell-1}} = 1\} = \mathfrak{H}_{\ell-1}^{\chi^{\circ}};$$

puis :

$$\text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_L = \dim_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathfrak{H}_{\ell-1}^{\chi^{\circ}} = \dim_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathfrak{H}_1^{\chi^{\circ}} + \sum_{i=2}^{\ell-1} \dim_{\mathbb{F}_{\ell}} (\mathfrak{H}_i/\mathfrak{H}_{i-1})^{\chi^{\circ}},$$

où $\mathfrak{H}_i$ désigne le noyau dans $\mathfrak{H}_N$ de l'opérateur δ^i .

Cela étant, d'après la proposition II.11, l'opérateur δ envoie injectivement chaque quotient $[\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i]^{\chi^j}$ dans le quotient $[\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_{i-1}]^{\chi^{j+1}}$, de sorte que $[\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i]^{\chi^{\circ}}$ s'injecte dans $\mathfrak{H}_1^{\chi^i}$ et plus précisément dans $\mathfrak{H}_1^{\star \chi^i}$.

Comme $\mathfrak{H}_1^{\chi^{\circ}}$ et $\mathfrak{H}_1^{\star \chi^{\circ}}$ coïncident, il vient donc :

$$\text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_L \leq \sum_{i=0}^{\ell-2} \dim_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathfrak{H}_1^{\star \chi^i} = \frac{\ell-1}{n} \dim_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathfrak{H}_1^{\star}.$$

Reste donc à évaluer la dimension $\rho^{\star}$ de $\mathfrak{H}_1^{\star}$. Or, sous les conditions de la proposition, pour tout $i \not\equiv 0 \pmod{n}$ le groupe $\mathfrak{H}_1^{\star \chi^i}$ est engendré par les classes dans $\mathfrak{H}_N$ des idéaux de K dont la puissance ℓ^i est principale dans $\mathfrak{H}_K$; ce que nous pouvons écrire :

$$\mathfrak{H}_1^{\star \chi^i} = (\mathfrak{D}_0^{\star}/\mathbb{C})^{\chi^i}; \text{ tandis que nous avons } \mathfrak{H}_1^{\chi^i} = (\mathfrak{D}_0/\mathbb{C})^{\chi^i}.$$

D'où $\dim_{\mathbb{F}_{\ell}} \mathfrak{H}_1^{\star} = \rho^{\star} = \rho - k + \text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_K = \text{rg}_{\ell} \mathfrak{H}_K + r - \omega - 1$, compte-tenu de l'évaluation $\rho = k + r\omega - 1$, donnée par la formule des classes ambiges.

Précisons un cas particulier dans lequel la majoration de la proposition se résout en une égalité :

Proposition IV.11. Soit N une extension métacyclique d'ordre $\ell(\ell-1)$ vérifiant les deux conditions :

(i) Le groupe des genres $\mathcal{G}$ est isotypique de caractère χ .

(ii) Le quotient $\mathfrak{H}_1(N) / (\mathfrak{D}_0 / \mathfrak{C})$ est isotypique de caractère χ° .

Alors, sous les deux conditions $H = H^\star$ et $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{C}$, il vient :

$$\text{rg}_\ell \mathfrak{H}_N = (\ell-1) \text{rg}_\ell \mathfrak{H}_L = (\ell-1) \rho^\star = (\ell-1) (\text{rg} \mathfrak{H}_K + r - w - 1),$$

et l'égalité $\text{rg}_\ell \mathfrak{H}_L = \rho^\star = \text{rg} \mathfrak{H}_K + r - w - 1$,

vaut encore sous la seule condition $H^\star = H^\delta$.

Démonstration :

Dans l'hypothèse $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^\star$, le noyau $\mathfrak{H}_N$ s'écrit $\mathfrak{H}_N = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i^{\alpha_i} / \mathfrak{g}_i^{\beta_i}$ et la condition (i) signifie que les α_i sont congrus à 1 mod n , tandis que la condition (ii) entraîne que les β_i sont congrus à 0.

D'où les égalités :

$$h_N = (\ell-1) h_L \quad \text{et} \quad \text{rg}_\ell \mathfrak{H}_N = (\ell-1) \text{rg}_\ell \mathfrak{H}_L = (\ell-1) \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathfrak{H}_1^\star.$$

Dans l'hypothèse $\mathfrak{H}^\delta = \mathfrak{H}^\star$, la condition (i) signifie que le groupe $\mathfrak{H}_K$ est isotypique de caractère χ ; de sorte que d'après la condition (ii), il vient $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1^\chi \oplus \mathfrak{H}_1^{\chi^\circ}$, puis :

$$\text{rg}_\ell \mathfrak{H}_L = \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathfrak{H}_1^{\chi^\circ} + \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathfrak{H}_2 / \mathfrak{H}_1)^\chi = \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathfrak{H}_1^{\star \chi^\circ} + \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathfrak{H}_1^{\star \chi} = \rho^\star$$

qui est la formule attendue.

Dans la pratique la condition (i) est de vérification facile : Par exemple elle est automatiquement remplie lorsque le groupe $\mathfrak{H}_K$ est isotypique de caractère χ , si les idéaux premiers de H qui se ramifient totalement dans L/H ne sont pas décomposés dans K/H (Il suffit pour s'en assurer d'appliquer la formule des genres). Par contre la condition (ii) fait intervenir les unités de façon non triviale et est de ce fait plus compliquée.

Signalons un cas particulier dans lequel les hypothèses de la proposition sont vérifiées en vertu de la formule des classes ambiges :

Corollaire. Soit N/H une extension diédrale de degré 6 sur le corps des rationnels, ou bien sur un corps quadratique imaginaire distinct de $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ et sans 3-groupe des classes, telle que la sous-extension N/K soit ramifiée en un idéal au plus. Alors, le ℓ -rang du groupe des classes de L est donné par :

$$\text{rg}_\ell \mathfrak{H}_L = \text{rg}_\ell \mathfrak{H}_K + r - 1.$$

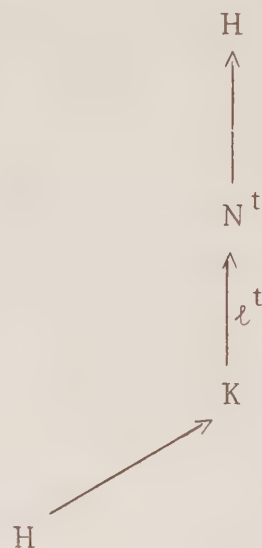
Les deux cas , $r = 0$, conjecturé par Callahan [Ca], et $r=1$, ont été démontrés par G. Gras [Gr 3] pour $H = \mathbb{Q}$.

En l'absence d'hypothèses particulières , les calculs de rangs des groupes de ℓ -classes des extensions métacycliques de degré $\ell^s n$ nécessitent la détermination effective des ordres des divers quotients $[\mathfrak{H}_{i+1}/\mathfrak{H}_i]^{\chi^j}$. Les techniques générales pour ce faire ont été développées par G. Gras dans [Gr 1] . Dans le cas le plus simple , celui d'une extension diédrale de degré 6 , il suffit , autre $\mathfrak{H}_1$, d'explicitier le seul terme $\mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_1$ (cf. [Ge 1] , [Li 1] , [Ko] , [Gr 4]) .

§ 3 . Donnons , pour conclure ce chapitre , quelques critères d'annulation des groupes de ℓ -classes .

Considérons donc une extension métacyclique de degré $\ell^s n$ sur un corps de nombres H , et supposons $\mathfrak{H}_N = 1$. Introduisons le sous-corps cyclique maximal N^t de N qui est non ramifié sur K . La formule des genres appliquée à l'extension cyclique totalement ramifiée N/N^t nous prouve que $\mathfrak{H}_{N^t}$ est nul . Le corps N^t est donc

le ℓ -corps de classes de Hilbert de K , ce qui nous prouve que le groupe $\mathfrak{H}_K$, qui s'identifie à $\text{Gal}(N^t/K)$ par l'isomorphisme de récipro - cité d'Artin , est cyclique d'ordre ℓ^s et iso - typique de caractère χ . Ainsi :



Proposition IV.11. Soit N/H une extension métacyclique relative de degré $\ell^s n$.

Si le ℓ -groupe des classes $\mathfrak{H}_N$ est trivial , le groupe $\mathfrak{H}_K$ est cyclique d'ordre ℓ^t (pour un $t \leq s$) et isotypique de caractère χ .

Pour tout $i = 0, \dots, t$ le groupe $\mathfrak{H}_{N^i}$ est alors cyclique d'ordre ℓ^{t-i} et isotypique de caractère χ .

Corollaire : Critère d'annulation .

Si N/H est une extension métacyclique de degré $\ell^s n$, l'identité $\mathfrak{H}_N = 1$ a lieu si et seulement si sont réalisées les conditions suivantes :

(i) $q_\chi = r_\chi$; $w_\chi = p_\chi = r_\chi - s + k_\chi$; et $k = k_\chi \leq s$.

(ii) $q_\chi^2 = r_\chi + k_\chi$; $w_\chi^2 = p_\chi^2 = r_\chi^2$.

(iii) $q_\psi = p_\psi = w_\psi = r_{\psi\chi^{-1}}$, pour les caractères ψ autres que χ et χ^2 .

Démonstration :

Supposons $\mathfrak{H}_N = 1$. Par la proposition IV.11 nous avons $k = k_\chi \leq s$; d'où , en appliquant la formule des genres (théorème IV.2) :

$$\omega_\psi = r_{\psi\chi^{-1}} \text{ pour } \psi \neq \chi \text{ et } \omega_\chi = r_{\chi\circ} + k_\chi - s .$$

Par ailleurs , toute classe ambige étant évidemment représentée par un idéal ambige , la proposition IV.3 nous donne : $p_\psi = \omega_\psi$ pour tout carac - tère ψ .

Cela étant , en tirant q_ψ de la relation du miroir (théorème IV.5) , nous obtenons bien les identités attendues .

Réciproquement , lorsque ces identités sont vérifiées , la formule des genres nous donne $\tilde{\rho} = 0$ et ceci suffit à entraîner $h = 0$ conformément à la proposition IV.2 .

Notons que ce critère peut être sensiblement affiné sous la condition $E_H \subset N_{L/H}(L)$. En effet , la formule des genres donne dans ce cas $\tilde{\rho}_{\chi\circ} = k_{\chi\circ} + r_{\chi^{-1}} - \omega_{\chi\circ} = k_{\chi\circ} + r_{\chi^{-1}}$; de sorte que $\tilde{\rho}_{\chi\circ} = 0$ entraîne $k_{\chi\circ} = r_{\chi^{-1}} = 0$, et cette dernière égalité exprime le fait qu'aucun

idéal ramifié dans N/K n'est complètement décomposé dans K/H (cf. proposition IV.5) . En particulier :

Proposition IV.12. Soit N/H une extension métacyclique de degré $\ell^s n$ sur le corps des rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire (distinct de $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ si ℓ vaut 3) . Si le ℓ -groupe des classes $\mathfrak{H}_L$ est trivial , aucun des idéaux premiers qui se ramifient dans N/K n'est complètement décomposé dans K/H .

Corollaire . Lorsque N/H est une extension diédrale de degré ℓ^s sur le corps des rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire (distinct de $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ si ℓ vaut 3) , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Le groupe des ℓ -classes $\mathfrak{H}_N$ est trivial .
- (ii) Le groupe $\mathfrak{H}_L$ est trivial et les ℓ -classes de $\mathfrak{H}_K$ capitulent dans $\mathfrak{H}_N$.

Démonstration :

La relation du miroir nous donne $h_{\chi} = h_{\chi}^{\circ} + k_{\chi} - q_{\chi}^{\circ}$ et la condition de capitulation s'écrit $k_{\chi} \leq q_{\chi}^{\circ}$ (cf. IV.2 § 3 , scolie) .

Ce corollaire , qui étend un résultat de Honda et Kobayashi [Ko] , est en défaut lorsque la condition normique $E_H \subset N_{L/H}(L)$ n'est pas vérifiée . Il suffit pour s'en convaincre de considérer les extensions $\mathbb{Q}[\sqrt[5]{m}, \zeta_5]$ comme corps diédraux de degré 10 sur le corps quadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ (cf. [Pa] et [li 2]) .

CHAPITRE V

ETUDE DU G -MODULE DES UNITES

Etant donné un corps de nombres algébriques N de degré fini, et A_N l'anneau de ses entiers, il est bien connu depuis Dirichlet que le groupe multiplicatif E_N des éléments inversibles de A_N est isomorphe au produit direct du sous-groupe cyclique μ_N des racines de l'unité contenues dans N , par un groupe abélien libre de rang fini $U_N = E_N / \mu_N$.

Plus précisément, lorsque N est une extension normale de l'un de ses sous-corps K , le groupe de Galois $G = \text{Gal}(N/K)$ opère sur E_N , et le théorème de Herbrand assure l'existence d'un système fini d'unités de N , indexé sur les places de K qui se ramifient dans N , et engendrant sur $\mathbb{Z}[G]$ un sous-module d'indice fini dans E_N .

Le problème se pose donc d'étudier la $\mathbb{Z}[G]$ -structure du module U_N , et en particulier sa monogénéité lorsque le corps de base est celui des rationnels ou encore un corps quadratique imaginaire.

Rappelons en particulier que d'après un résultat de Brumer, le groupe U_N est effectivement $\mathbb{Z}[G]$ -monogène, pour les extensions cycliques d'ordre premier sur $\mathbb{Q}$, sous réserve de primalité du corps cyclotomique.

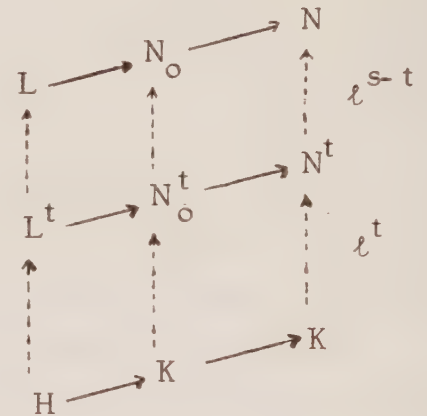
1. DESCRIPTION DES GROUPES D'UNITES DANS LES EXTENSIONS METABELIENNES .

Nous désignons toujours par H un corps de nombres algébriques de degré fini sur $\mathbb{Q}$, et par N une extension normale sur H , de groupe de Galois G' métabélien et d'ordre $\ell^s n'$.

§ 1 . Pour tout corps de nombres Ω , convenons de noter E_Ω le groupe multiplicatif de l'anneau A_Ω de ses $\mathbb{Z}$ -entiers , et μ_Ω son sous-groupe de torsion constitué par les racines de l'unité contenues dans Ω . Nous écrivons U_Ω pour le quotient E_Ω/μ_Ω .

Comme plus haut, pour toute sous-extension abélienne K_0 de K/H , nous désignons par N_0 l'extension composée LK_0 ; et , plus généralement, pour tout $t = 0, \dots, s$, par N_0^t l'unique sous-corps de N_0 qui est de degré ℓ^t sur K_0 .

Précisons en premier lieu la structure galoisienne du groupe des racines de l'unité :



Proposition V.1. Dans une extension métabélienne N/H d'un corps de nombres, le groupe de Galois $S = \text{Gal}(N/K)$ opère trivialement sur les racines de l'unité . En particulier , pour tout sous-corps K_0 de N , au-dessus de H , le corps $N_0 = LK_0$ ne contient d'autres racines de l'unité que celles de K_0 .

Démonstration :

Considérons en effet le noyau de l'action de G' sur le groupe μ_N des racines de l'unité . C'est un sous-groupe distingué de G' , qui définit un quotient abélien . Il contient donc le sous-groupe dérivé S , ce qui nous prouve que μ_N est réduit à μ_K .

Plus généralement , pour tout sous-groupe T_0 de T , les racines de l'unité de son sous-corps des invariants N_0 , sont fixées et par T_0 et par S , donc contenues dans K_0 .

§ 2 . Pour étudier la structure galoisienne des groupes de classes d'unités modulo la torsion , nous pouvons utiliser l'un ou l'autre des dévissages que nous avons défini dans le chapitre II . Le premier , qui

consiste à prendre le noyau de la norme naturelle $N_{N/N^{s-1}}$ opérant sur U_N , conduit à étudier le sous-groupe U_N^* des classes d'unités relatives; le second amène à considérer le quotient de U_N par son sous-module invariant par $S^{\ell^{s-1}}$.

Introduisons donc les définitions suivantes :

Définition . Pour tout sous-corps N_0 de N au-dessus de L , nous appelons sous-groupe des unités relatives de N_0 le noyau $E_{N_0}^*$ de la norme naturelle de E_{N_0} dans $E_{N_0^{s-1}}$; et nous appelons :

sous-groupe des classes d'unités relatives le noyau $U_{N_0}^*$ de la norme naturelle de U_{N_0} dans $U_{N_0^{s-1}}$.

Nous désignons par Δ_{N_0} l'image réciproque dans E_{N_0} du sous-groupe de torsion de quotient $E_N/E_{N^{s-1}}$.

La détermination du sous-groupe Δ_{N_0} ne présente pas de difficulté (cf. [Mo]) :

Proposition V.2. Soit N_0 le corps des invariants d'un sous-groupe T'_0 de T' .

(i) Le groupe Δ_{N_0} est le noyau dans E_{N_0} de l'opérateur $(v_s - \ell)$.

(ii) Le quotient $\Delta_{N_0}/E_{N_0^{s-1}}$ est d'ordre ℓ au plus; et il est non trivial dans le seul cas où N_0 est engendré sur N_0^{s-1} par la racine $\ell^{\text{ième}}$ d'une unité de N_0^{s-1} .

Démonstration :

Remarquons en premier lieu que l'élément $v_s = v(\sigma^{\ell^{s-1}})$ opère effectivement sur le groupe E_{N_0} , même si celui-ci n'est pas un $Z[G']$ -module, et s'identifie à la norme $N_{N/N^{s-1}}$.

L'inclusion $\text{Ker}(v_s - \ell) \subset \Delta_{N_0}$ est alors une conséquence immédiate de la définition. Réciproquement, soit, si possible, une unité η de N_0 appar-

tenant à Δ_{N_0} mais non à $E_{N_0^{s-1}}$. Par hypothèse, il existe un plus petit entier $p > 0$ pour lequel η^p est dans N_0^{s-1} . D'après la proposition V.1, l'élément η n'est pas une racine de l'unité, et le corps N_0 contient l'extension $N_0^{s-1}[\sqrt[p]{\eta^p}]$, qui est de degré p sur N_0^{s-1} . Ainsi p est égal à ℓ , et N_0 est l'extension $N_0^{s-1}[\sqrt[p]{\eta^p}]$. En particulier, le corps N qui est cyclique sur N^{s-1} est une extension de Kummer et le groupe de Galois $S^{\ell^{s-1}} = \text{Gal}(N/N^{s-1})$ agit sur η par multiplication par les racines $\ell^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Nous avons donc $\eta^{\vee s} = \eta^{\ell}$, ce qui établit notre proposition.

Rappelons que l'ordre du quotient $\Delta_{N_0}/E_{N_0^{s-1}}$ est souvent appelé indice de Hasse de l'extension N_0/N_0^{s-1} , par généralisation du cas abélien.

§ 3. Il résulte de la proposition V.2, qu'une condition nécessaire pour que l'indice de Hasse d'une sous-extension N_0/N_0^{s-1} soit égal à ℓ , est que la clôture galoisienne de N_0 au-dessus de H soit une extension de Kummer, contenant les racines $\ell^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Ainsi :

Corollaire 1. Soient N_0 le corps des invariants d'un sous-groupe T'_0 de T' , et N'_0 sa clôture galoisienne, fixée par $(T'_0 \cap R)$. Si le sous-corps abélien K'_0 de N'_0 ne contient pas les racines $\ell^{\text{ièmes}}$ de l'unité, le quotient $E_{N_0}/E_{N_0^{s-1}}$ est sans torsion.

Notons par contre que si N_0 n'est pas galoisien sur H , le groupe Δ_{N_0} peut être distinct de $E_{N_0^{s-1}}$, sans que E_{N_0} contienne les racines $\ell^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Ainsi en est-il par exemple du sous-corps

$N_0 = \mathbb{Q}\left[\sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right]$, d'indice 2 dans l'extension métacyclique

$N = \mathbb{Q}\left[\zeta_5, \sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right]$, de degré 20 sur le corps des rationnels.

Corollaire 2. Pour tout sous-corps N_0 de N au-dessus de L , le sous-groupe de U_{N_0} fixé par $S^{\ell^{s-1}}$ est le quotient Δ_{N_0}/μ_{K_0} .

Démonstration :

Considérons en effet une unité η de E_{N_0} dont la classe modulo μ_N soit invariante dans U_N . Le quotient $\eta^{1-\sigma^{\ell^{s-1}}}$ est alors une racine de l'unité, de sorte que η est dans le sous-groupe Δ_{N_0} .

Réciproquement, si η est une unité de Δ_{N_0} , il résulte de l'action de $S^{\ell^{s-1}}$ décrite par la proposition V.2 que sa classe modulo μ_N est invariante dans U_N .

Conformément à la proposition II.3, les deux groupes U_N^* et E_N/Δ_N sont isomorphes en tant que modules sur l'anneau cyclotomique $A^{(\ell^s)}$ engendré par les racines $\ell^{s-ièmes}$ de l'unité.

Ce résultat serait en défaut si nous avions effectué le dévissage du II.2 § 1 à partir, non de U_N , mais de E_N . En effet :

- d'une part le sous-groupe E_N^* est isomorphe à la somme directe de groupes $U_N^* \oplus \mu_N^*$, où μ_N^* désigne le sous-groupe des racines $\ell^{ièmes}$ de l'unité contenues dans N ;
- d'autre part le quotient $E_N/E_{N^{s-1}}$ s'écrit $E_N/\Delta_N \oplus \Delta_N/E_{N^{s-1}}$ en tant que $\mathbb{Z}$ -module, et d'après ce qui précède $\Delta_N/E_{N^{s-1}}$ peut être nul sans que μ_N^* le soit.

Notons pour finir qu'un résultat semblable à celui de la proposition V.2 vaut pour l'extension N/K . En effet :

Proposition V.3. Soient N_0 le corps des invariants d'un sous-groupe T'_0 de T , et K_0 le sous-corps $N_0 \cap K$ fixé par ST'_0 .

(i) L'image réciproque W_{N_0} dans le groupe des unités E_{N_0} du sous-groupe de torsion E_N/E_K est le noyau dans E_{N_0} de l'opérateur $(v - \ell^s)$, où $v = 1 + \sigma + \dots + \sigma^{\ell^{s-1}}$ est l'application norme $N_{N/K}$.

(ii) Le quotient W_N/E_K est un ℓ -groupe fini sur lequel S opère trivialement. L'ordre ℓ^t de W_{N_0}/E_{K_0} , appelé indice de Hasse de l'extension N_0/K_0 , est le degré de la plus grande sous-extension de N_0/K_0 qui est kummerienne de type unité, i.e. de la forme $N_0^t = K_0[\ell^t \sqrt[t]{\epsilon}]$, pour une unité non racine ϵ de E_K .

Démonstration :

Comme plus haut l'élément $\nu = 1 + \sigma + \dots + \sigma^{\ell^s - 1}$ opère sur E_{N_O} et le noyau $\text{Ker}(\nu - \ell^s)$ est contenu dans W_{N_O}

Réciproquement soient , si possible , η une unité de N_O appartenant à W_{N_O} mais non à E_{K_O} , puis p le plus petit entier strictement positif tel que η^p soit dans E_K . Comme η ne saurait être une racine de l'unité , d'après la proposition V.1 , le corps N_O contient l'extension $K_O[\sqrt[p]{\eta^p}]$ qui est de degré p sur K_O . Ainsi p est égal à ℓ^t pour un t de $[1, s]$ et $N^t = K[\sqrt[p]{\eta^p}]$ est une extension de Kummer de type unité sur K ; de sorte que le groupe de Galois $S/S^{\ell^t} = \text{Gal}(N^t/K)$ agit sur η par multiplication par les racines $\ell^{t\text{-ièmes}}$ de l'unité. En particulier il vient donc

$$N_{N^t/K}(\eta) = \eta^{\ell^t} , \text{ puis } \eta^\nu = N_{N^t/K}(\eta^{\ell^{s-t}}) = \eta^{\ell^s} ,$$

ce qui achève la démonstration .

2. PROPRIETES GALOISIENNES DES GROUPES D'UNITES RELATIVES D'UNE EXTENSION METACYCLIQUE .

Nous nous restreignons , dans ce paragraphe , au cas où N est une extension métacyclique de degré $\ell^s n$ sur un corps de nombres H .

§ 1 . Intéressons-nous aux groupes U_N^* et E_N/Δ_N et étudions d'abord le quotient E_N/Δ_N . D'après ce qui précède , l'action du groupe de Galois $G = \text{Gal}(N/H)$ en fait naturellement un Λ^S -module sans $\mathbb{Z}$ -torsion donc $A^{(\ell^s)}$ -projectif . Par suite (théorème II.2) :

Théoreme V.1 . Etant donnée une extension métacyclique N de degré $\ell^s n$ sur un corps de nombres H , le groupe quotient E_N/Δ_N est muni canoniquement par l'action du groupe de Galois d'une structure de module projectif sur l'algèbre croisée $\Lambda^S = \mathbb{Z}[\zeta, T]$.

Comme tel , il est isomorphe à une somme directe :

$$E_N/\Delta_N \simeq \bigoplus_{i,j} a_{ij} \mathcal{L}^i , \text{ où les } a_{ij} \text{ sont des idéaux étendus de l'anneau } A_O^{(\ell^s)},$$

d'indice n dans l'anneau cyclotomique et $\mathcal{L}$ l'idéal maximal $(1 - \zeta) A^{(\ell^s)}$.

Avant d'aborder le problème de la détermination des invariants galoisiens de cette décomposition, que nous traiterons plus loin par des méthodes locales , nous pouvons en tirer un certain nombre de conséquences :

Corollaire 1 . Pour tout sous-groupe T_O de T , l'application norme $N_{N/N_O} = \sum_{\tau \in T_O} \tau$, de N sur le sous-corps des invariants de T_O , envoie E_N/Δ_N sur E_{N_O}/Δ_{N_O} .

En particulier , le sous- $\mathbb{Z}[G]$ -module de E_N/Δ_N engendré par E_L/Δ_L est donné par la décomposition directe :

$$\prod_{k=0}^{\ell^s-1} E_L^{\sigma^k} / \Delta_L^{\sigma^k} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k} / \Delta_L^{\sigma^k} \simeq \bigoplus_{i,j} a_{ij} \mathcal{L}^{n[(i+n-1)/n]} .$$

Démonstration :

Considérons la décomposition $E_N/\Delta_N \simeq \bigoplus_{i,j} a_{ij} \mathcal{L}^i$, donnée par le théorème V.1. Puisque l'extension $\mathbb{Q}^{(\ell^s)}/\mathbb{Q}_0^{(\ell^s)}$ est modérément ramifiée, nous savons par le théorème III.1 que l'application trace envoie $A^{(\ell^s)}$ sur $A_0^{(\ell^s)}$, et plus généralement que pour toute extension intermédiaire, l'anneau des entiers B est l'image par la trace $\text{Tr}_{A^{(\ell^s)}/B}$ de l'anneau cyclotomique $A^{(\ell^s)}$. Transporté dans la décomposition ci-dessus ce résultat exprime que pour tout sous-groupe T_0 de T , le quotient $(E_N/\Delta_N)^{T_0}$ fixé par T_0 n'est autre que $N_{N/N_0}(E_N/\Delta_N)$. De la double inclusion $N_{N/N_0}(E_N/\Delta_N) \subset E_{N_0}/\Delta_{N_0} \subset (E_N/\Delta_N)^{T_0}$, nous déduisons immédiatement $E_{N_0}/\Delta_{N_0} = N_{N/N_0}(E_N/\Delta_N)$, de sorte que les quotients E_N/Δ_N vérifient la théorie de Galois relativement à T .

En particulier, nous avons :

$$E_L/\Delta_L = N_{N/L}(E_N/\Delta_N) \simeq \bigoplus_{i,j} a_{ij} \mathcal{L}_0^{[(i+n-1)/n]}, \text{ où } \mathcal{L}_0 \text{ représente}$$

l'idéal maximal de $A_0^{(\ell^s)}$ au-dessus de ℓ . La décomposition en produit direct du $\mathbb{Z}[G]$ -module engendré résulte de ce que $(1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1})$ est une base de $A^{(\ell^s)}$ sur $A_0^{(\ell^s)}$.

Corollaire 2. Sous la condition $E_H \subset N_{K/H}(E_K)$, l'application norme $N_{N/L}$ envoie E_N sur E_L . En particulier, si N est une extension métacyclique du corps des rationnels ou d'un corps quadratique imaginaire, la norme $N_{N/L}$ envoie U_N sur U_L .

Démonstration :

Remarquons en premier lieu que le quotient $E_L/N_{N/L}(E_N)$ est un groupe fini d'exposant divisant n , et raisonnons par récurrence sur l'exposant s de l'ordre de G . Puisque pour $s = 0$ nous avons $E_H = N_{K/H}(E_K)$ par hypothèse, supposons $E_{L^{s-1}} = N_{N/L}(E_{N^{s-1}})$ et appliquons le corollaire 1. Il vient $E_L = \Delta_L N_{N/L}(E_N)$ de sorte que E_L^ℓ qui s'écrit $\Delta_L^\ell N_{N/L}(E_N^\ell)$ est contenu dans $E_{L^{s-1}}^\ell N_{N/L}(E_N^\ell)$ et finalement dans $N_{N/L}(E_N)$; ce qui établit la première partie du corollaire.

Notons que sous la condition $U_H \subset N_{K/H}(U_K)$, le même raisonnement s'applique, qui nous donne $U_N \subset N_{N/L}(U_L)$ au terme de la récurrence. Il suffit alors de remarquer que U_H est réduit à 1 lorsque H est le corps des rationnels ou un corps quadratique imaginaire.

§ 2. Etudions maintenant le groupe U_N^* des classes d'unités relatives. Par le même argument que plus haut, nous obtenons :

Théorème V.2. Etant donnée une extension métacyclique N de degré $\ell^s n$ sur un corps de nombres H , le groupe U_N^* des classes d'unités relatives est muni canoniquement par l'action du groupe de Galois d'une structure de module projectif sur l'algèbre croisée $\Lambda^s = \mathbb{Z}[\zeta, T]$.

Comme tel, il est isomorphe à une somme directe $U_N^* \simeq \bigoplus_{i,j} b_{ij} \mathcal{L}^i$, où les b_{ij} sont des idéaux étendus de l'anneau $A_O^{(\ell^s)}$, d'indice n dans l'anneau cyclotomique, et $\mathcal{L}$ l'idéal maximal $(1 - \zeta) A^{(\ell^s)}$.

Rappelons que, conformément au théorème II.3, si les idéaux b_{ij} , qui interviennent dans la décomposition, ne sont pas des invariants, l'image du produit $\prod_{i,j} b_{ij}$ dans le groupe des classes d'idéaux du corps $\mathbb{Q}_O^{(\ell^s)}$ en est un, par contre, qui caractérise avec le rang la structure de $A^{(\ell^s)}$ -module du groupe U_N^* . Par un argument déjà utilisé (Chap. III.3, § 1), cette classe est aussi représentée par le produit $\prod_{i,j} a_{ij}$ correspondant au groupe E_N/Δ_N .

Les unités cyclotomiques généralisées, introduites par H.W. Leopoldt, devraient permettre une généralisation à ce cas de l'interprétation, donnée par Brumer [Br], de cet invariant pour les extensions cycliques de degré premier sur $\mathbb{Q}$.

De la décomposition donnée par le théorème, nous déduisons immédiatement :

Corollaire. Pour tout sous-groupe T_O de T , l'application norme $N_{N/N_O} = \sum_{\tau \in T_O} \tau$ de N sur le sous-corps des invariants de T_O , envoie U_N^* sur $U_{N_O}^*$.

En particulier , le sous- $\mathbb{Z}[G]$ -module de $U_N^\star$ engendré par $U_L^\star$ est donné par la décomposition directe :

$$\prod_{k=0}^{\ell^s-1} U_L^{\star\sigma^k} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} U_L^\star \simeq \bigoplus_{i,j} b_{ij} \mathbb{Z}^{n[(i+n-1)/n]} .$$

La démonstration est analogue en tous points à celle du corollaire 1 au théorème V.1 .

§ 3 . Ainsi que nous l'avons signalé , les groupes E_N/Δ_N et $U_N^\star$, isomorphes en tant que $A^{(\ell^s)}$ -modules , ne le sont plus , en général , en tant que Λ^s -modules .

Pour illustrer ce point , évaluons dans les deux cas l'indice du sous- $\mathbb{Z}[G]$ -module engendré par l'image de la norme $N_{N/L} = \sum_{\tau \in T} \tau$. Il vient :

Proposition V.4. Sous les mêmes hypothèses , les quotients d'unités :

$$(E_N/\Delta_N) / \prod_{k=0}^{\ell^s-1} (E_L^{\sigma^k}/\Delta_L^{\sigma^k}) \text{ et } U_N^\star / \prod_{k=0}^{\ell^s-1} U_L^{\star\sigma^k} ,$$

sont l'un et l'autre des $\mathbb{Z}[G]$ -modules finis d'ordre ℓ -primaire . Leurs ℓ -valuations respectives $a^\star$ et $b^\star$ sont liées par la relation :

$$\left[E_N/\Delta_N : \prod_{k=0}^{\ell^s-1} (E_L^{\sigma^k}/\Delta_L^{\sigma^k}) \right] = \left[U_N^\star : \prod_{k=0}^{\ell^s-1} U_L^{\star\sigma^k} \right] \frac{\left[N_{N/N^{s-1}(U_N)} : U_N^\ell \cap U_{N^{s-1}} \right]}{\left[N_{L/L^{s-1}(U_L)} : U_L^\ell \cap U_{L^{s-1}} \right]^n}$$

Démonstration :

Le fait que les quotients considérés soient deux ℓ -groupes finis résulte des théorèmes de structure qui précèdent. Pour comparer leurs ordres respectifs , remarquons alors que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \left[E_N/\Delta_N : \prod_{k=0}^{\ell^s-1} (E_L^{\sigma^k}/\Delta_L^{\sigma^k}) \right] &= \left[E_N/\Delta_N : \bigoplus_{k=0}^{n-1} (E_L^{\sigma^k}/\Delta_L^{\sigma^k}) \right] = \\ &= \left[E_N/\Delta_N : U_N^\star \right] \frac{\left[U_N^\star : \bigoplus_{k=0}^{n-1} U_L^{\star\sigma^k} \right]}{\left[\bigoplus_{k=0}^{n-1} (E_L^{\sigma^k}/\Delta_L^{\sigma^k}) : \bigoplus_{k=0}^{n-1} U_L^{\star\sigma^k} \right]} , \end{aligned}$$

compte-tenu de la décomposition directe $\prod_{k=0}^{\ell^s-1} (E_L^{\sigma^k}/\Delta_L^{\sigma^k}) = \bigoplus_{k=0}^{n-1} (E_L^{\sigma^k}/\Delta_L^{\sigma^k})$

et du fait que $U_N^\star$ s'identifie canoniquement à un sous-groupe de E_N/Δ_N : en effet , si η est une unité de Δ_N représentant une classe de $U_N^\star$, la proposition V.2 nous prouve que $\eta^\ell = \eta^{\nu_s}$ est une racine de l'unité , de sorte que la classe de η est la classe unité de $U_N^\star$.

Or le terme $\left[U_N^\star : \bigoplus_{k=0}^{n-1} U_L^{\star \sigma^k} \right]$ n'est autre que $\left[U_N^\star : \prod_{k=0}^{\ell^s-1} U_L^{\star \sigma^k} \right]$

et le dénominateur $\left[\bigoplus_{k=0}^{n-1} (E_L^{\sigma^k} / \Delta_L^{\sigma^k}) : \bigoplus_{k=0}^{n-1} U_L^{\star \sigma^k} \right]$ est encore

$$\prod_{k=0}^{n-1} [E_L^{\sigma^k} / \Delta_L^{\sigma^k} : U_L^{\star \sigma^k}] = [E_L / \Delta_L : U_L^\star]^n . \text{ La proposition sera donc}$$

établie si nous évaluons $[E_N / \Delta_N : U_N^\star]$ et $[E_L / \Delta_L : U_L^\star]$. Cela peut se faire en utilisant la norme relative $\nu_s = N_{N/N^{s-1}}$, qui nous donne les

isomorphismes :

$$(E_N / \Delta_N) / U_N^\star \simeq E_N^{\nu_s} / \Delta_N^\ell (\mu_K \cap E_N^{\nu_s}) \simeq U_N^{\nu_s} / (U_N^\ell \cap U_{N^{s-1}}) ,$$

$$(E_L / \Delta_L) / U_L^\star \simeq E_L^{\nu_s} / \Delta_L^\ell (\mu_H \cap E_L^{\nu_s}) \simeq U_L^{\nu_s} / (U_L^\ell \cap U_{L^{s-1}}) ,$$

et conduit à la formule attendue .

Ces dernières quantités peuvent s'exprimer autrement, de façon à faire apparaître l'indice de Hasse de l'extension N/N^s .

Nous avons en effet :

$$\left[U_N^{\nu_s} : U_N^\ell \cap U_{N^{s-1}} \right] = \frac{[U_{N^{s-1}} : U_{N^{s-1}}^\ell]}{[U_{N^{s-1}} : U_N^{\nu_s}] [U_N^\ell \cap U_{N^{s-1}} : U_{N^{s-1}}^\ell]} ;$$

puis de façon semblable :

$$\left[U_L^{\nu_s} : U_L^\ell \cap U_{L^{s-1}} \right] = \frac{[U_{L^{s-1}} : U_{L^{s-1}}^\ell]}{[U_{L^{s-1}} : U_L^{\nu_s}] [U_L^\ell \cap U_{L^{s-1}} : U_{L^{s-1}}^\ell]} .$$

Et , toute classe du quotient $(U_N^\ell \cap U_{N^{s-1}}) / U_{N^{s-1}}^\ell$ pouvant être représentée par une unité de Δ_N^ℓ , l'ordre $[U_N^\ell \cap U_{N^{s-1}} : U_{N^{s-1}}^\ell]$ vaut

$\left[\Delta_N^\ell \cap U_{N^{s-1}} : U_{N^{s-1}}^\ell \right]$ et est égal à l'indice de Hasse $\left[\Delta_N : E_{N^{s-1}} \right]$.

Un résultat analogue vaut pour $\left[U_L^\ell \cap U_{L^{s-1}} : U_{L^{s-1}}^\ell \right] = \left[\Delta_L : E_{L^{s-1}} \right]$.

Corollaire . Désignons par $\mathfrak{h}(N/N^{s-1})$ l'indice de Hasse de l'extension N/N^{s-1} et par $\mathfrak{h}(L/L^{s-1})$ celui de L/L^{s-1} . Nous obtenons :

$$\ell^{a^\star - b^\star} = \frac{\left[U_{N^{s-1}} : U_{N^{s-1}}^\ell \right]}{\left[U_{L^{s-1}} : U_{L^{s-1}}^\ell \right]^n} \frac{\left[U_{L^{s-1}} : N_{L/L^{s-1}}(U_L) \right]^n}{\left[U_{N^{s-1}} : N_{N/N^{s-1}}(U_N) \right]} \frac{\mathfrak{h}(L/L^{s-1})^n}{\mathfrak{h}(N/N^{s-1})} .$$

Et le premier quotient est égal au produit $\ell^{n-1} \prod_{\mathfrak{p}} \ell^{-n \left(1 - \frac{1}{e_{\mathfrak{p}}} \right)}$ étendu aux places à l'infini de H .

En effet (proposition 1.3) le rang du groupe des unités $U_{N^{s-1}}$ est donné par la formule : $\text{rg } U_{N^{s-1}} + 1 = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{n}{e_{\mathfrak{p}}} \ell^{s-1}$; tandis que celui de $U_{L^{s-1}}$ vérifie : $\text{rg } U_{L^{s-1}} + 1 = \sum_{\mathfrak{p}} \left(1 + \frac{\ell^{s-1} - 1}{e_{\mathfrak{p}}} \right)$.

Il vient donc $\text{rg } U_{N^{s-1}} - n \text{rg } U_{L^{s-1}} = (n-1) - \sum_{\mathfrak{p}} n \left(1 - \frac{1}{e_{\mathfrak{p}}} \right)$ ce qui établit le corollaire .

Par exemple , lorsque N est la clôture galoisienne d'un corps pur $L = \mathbb{Q}[\sqrt[m]{m}]$, la formule s'écrit $\ell^{a^\star - b^\star} = \ell^{n/2 - 1} [U_K : N_{N/K}(U_N)]$.

3 . DETERMINATION DES INDICES LOCAUX POUR UNE EXTENSION METABELIENNE .

Les résultats qui précèdent montrent clairement que les différents indices qui définissent la structure galoisienne des groupes d'unités relatives sont des puissances du nombre premier ℓ . Il est donc légitime pour les calculer de faire opérer l'anneau $\mathbb{Z}_\ell$ des entiers ℓ -adiques sur les groupes d'unités par extension des scalaires .

Nous supposons dans ce qui suit que N est une extension métabélienne de degré $\ell^s n'$ sur un corps de nombres H , composée directe d'une extension abélienne et d'une extension métacyclique .

§ 1 . Tout comme au chapitre IV.2 , introduisons des notations gothiques pour désigner les tensorisés des groupes d'unités .

Plus précisément , pour tout sous-corps Ω de N , notons :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_\Omega &= \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_\Omega & \mathfrak{u}_\Omega &= \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_\Omega & \mathfrak{U}_\Omega &= \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} U_\Omega \\ \text{les } \mathbb{Z}_\ell\text{-modules construits sur les groupes d'unités , et} \\ \mathfrak{E}_\Omega^\star &= \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_\Omega^\star & \mathfrak{u}_\Omega^\star &= \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \mu_\Omega^\star & \mathfrak{U}_\Omega^\star &= \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} U_\Omega^\star \\ \text{leurs sous-modules respectifs annulés par la norme relative } \nu_s . \end{aligned}$$

$$\text{Posons enfin } \mathfrak{B}_\Omega = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} \Delta_\Omega \quad \text{et} \quad \mathfrak{W}_\Omega = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} W_\Omega .$$

Definition . Pour tout caractère ℓ -adique ψ du groupe abélien T' , nous désignons par $\mathfrak{E}^\psi$ le groupe des ψ -unités du corps N , image par l'idempotent $e_\psi = \frac{1}{n'} \sum_{\tau \in T'} \psi(\tau^{-1}) \tau$, du groupe $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_N$ des unités de N .

En particulier , si N_0 est un sous-corps de N au-dessus de L , et T'_0 le sous-groupe de T' qui lui correspond par la théorie de Galois , le groupe $\mathfrak{E}_{N_0}$ s'identifie canoniquement au sous-groupe $\mathfrak{E}^{\psi_0}$ de $\mathfrak{E}$ associé au caractère ψ_0 induit par le caractère unité de T'_0 .

En effet , dans un $\mathbb{Z}_\ell[T']$ -module , un élément η fixé par un sous-groupe T'_0 s'écrit $\eta = \eta^{e_{\psi_0}}$; de sorte que le sous-module des invariants de T'_0 est exactement $\text{Im } e_{\psi_0}$.

Considérons maintenant les deux modules d'unités relatives $\mathfrak{M} = \mathfrak{E}_N / \mathfrak{B}_N$ et $\mathfrak{U}^\star = \mathfrak{U}_N^\star$; puis , pour tout idempotent e_φ de $\mathbb{Z}_\ell[G']$ provenant d'un caractère irréductible du centre (cf. prop. II.5) écrivons

$\mathfrak{M}^\varphi \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{j=1}^{m_i^*} \mathfrak{g}^i$ et $u^{\star\varphi} \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{j=1}^{u_i^*} \mathfrak{g}^i$ leurs décompositions ,
et notons que les sommes $\sum m_i^*$ et $\sum u_i^*$ ont pour valeur commune la dimension $m^* = \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^\delta)^\varphi$.

Pour évaluer les indices m_i^* et u_i^* , plutôt que de former les quotients :

$$(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^\delta)^\varphi \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\mathbb{F}_\ell \bar{e}_{\chi^i})^{m_i^*} \text{ et } (u^{\star}/u^{\star\delta})^\varphi \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\mathbb{F}_\ell \bar{e}_{\chi^i})^{u_i^*} ,$$

il est plus simple d'utiliser l'opérateur $\delta_s = 1 - \sigma^{\ell^{s-1}}$, puis d'écrire :
 $(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^{\delta_s})^\varphi \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^n (\mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+\ell^{s-1}})^{m_i^*}$ et $(u^{\star}/u^{\star\delta_s})^\varphi \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\mathfrak{g}^i/\mathfrak{g}^{i+\ell^{s-1}})^{u_i^*}$,

et de remarquer qu'en vertu des isomorphismes de $\mathbb{F}_\ell[T']$ -modules :

$$(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^{\delta_s})^\varphi \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\mathbb{F}_\ell \bar{e}_{\chi^i})^{m_i^* + \frac{m^*}{n}(\ell^{s-1}-1)} \quad \text{et}$$

$$(u/u^{\star\delta_s})^\varphi \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\mathbb{F}_\ell \bar{e}_{\chi^i})^{u_i^* + \frac{m^*}{n}(\ell^{s-1}-1)}$$

les indices u_i^* et m_i^* sont uniquement déterminés par l'action du groupe de Galois $\text{Gal}(N/L^{\ell^{s-1}})$

Cela étant , nous avons :

Proposition V.5. Soient N/H une extension métabélienne , de degré $\ell^s n'$, de groupe de Galois G' , et ψ un caractère ℓ -adique du groupe abélien $T' = \text{Gal}(K/H)$.

Introduisons les groupes d'unités :

$$\mathfrak{x} = (u_N \cap \mathfrak{U}_N^{\vee_s})/u_N^\ell , \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{U}_N^{\star}/\mathfrak{U}_N^{\delta_s} u_N^{\star} , \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{U}_N/\mathfrak{U}_N \mathfrak{U}_N^{\star} .$$

Alors :

(i) Si $\mathfrak{M}$ désigne le module $\mathfrak{U}_N/\mathfrak{U}_N$, le quotient $\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^{\delta_s}$ est déterminé en tant que $\mathbb{F}_\ell[T']$ -module par les isomorphismes :

$$(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^{\delta_s})^\psi \simeq \mathfrak{y}^\psi \oplus \mathfrak{z}^\psi .$$

(ii) Tandis que si $u^{\star}$ désigne le module $u_N^{\star}$, le quotient $u^{\star}/u^{\star\delta_s}$ donne lieu aux isomorphismes de $\mathbb{F}_\ell$ -espaces :

$$\mathfrak{x}^\psi \chi^{-1} \oplus (u^{\star}/u^{\star\delta_s})^\psi \simeq \mathfrak{x}^\psi \oplus \mathfrak{y}^\psi \oplus \mathfrak{z}^\psi \chi^{-1} .$$

Démonstration :

Notons $\tilde{\mathfrak{C}}_N$ le sous-module de $\mathfrak{C}_N$, image réciproque par ν_s du groupe des racines de l'unité : $\tilde{\mathfrak{C}}_N = {}^{-1}\nu_s(u_N)$.

Par action de l'opérateur ν_s , le groupe $\mathfrak{z}$ s'identifie cano -
niquement au quotient $\tilde{\mathfrak{C}}_N/\mathfrak{C}_N^*$.

Or, d'une part nous pouvons écrire (pour la structure de $\mathbb{F}_\ell[T']$ - mo -
dule) :

$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{\delta_s} \simeq \mathfrak{C}_N/\mathfrak{z}_N \mathfrak{C}_N^{\delta_s} \simeq \mathfrak{C}_N/\mathfrak{z}_N \mathfrak{C}_N^* \oplus \mathfrak{z}_N \mathfrak{C}_N^*/\mathfrak{z}_N \mathfrak{C}_N^{\delta_s} \simeq \mathfrak{C}_N/\mathfrak{z}_N \mathfrak{C}_N^* \oplus \mathfrak{C}_N^*/\mathfrak{C}_N^{\delta_s} (\mathfrak{z}_N \cap \mathfrak{C}_N^*)$
par l'isomorphisme du losange ; et nous reconnaissons $\mathfrak{y} \oplus \mathfrak{z}$ dans le mem -
bre de droite, ce qui établit le premier point de la proposition.

D'autre part, nous avons de même : $u^*/u^{\delta_s} \simeq u^*/u^{\delta_s} \oplus u^{\delta_s}/u^{\delta_s}$;
puis, en remarquant que toute classe de u^* est représentée par un élé -
ment de $\tilde{\mathfrak{C}}_N$:

$u^*/u^{\delta_s} \simeq \tilde{\mathfrak{C}}_N/\mathfrak{C}_N^* \oplus \mathfrak{C}_N^*/\mathfrak{C}_N^{\delta_s} u^*$ et $\mathfrak{C}_N/\mathfrak{z}_N \mathfrak{C}_N^* \simeq \mathfrak{C}_N/\mathfrak{z}_N \tilde{\mathfrak{C}}_N \oplus \tilde{\mathfrak{C}}_N/\mathfrak{C}_N^*$.

Il suffit alors de remarquer que l'opérateur δ_s induit par passage au quo -
tient une bijection de $\mathfrak{C}_N/\mathfrak{z}_N \tilde{\mathfrak{C}}_N$ sur $u_N^{\delta_s}/u_N^{\delta_s}$ qui envoie $(\mathfrak{C}_N/\mathfrak{z}_N \tilde{\mathfrak{C}}_N)^{\psi\chi^{-1}}$
sur $(u^{\delta_s}/u^{\delta_s})$, pour obtenir la relation attendue.

§ 2. Des calculs qui précèdent, nous déduisons la valeur des in -
dices cherchés :

Corollaire 1. Désignons par φ un caractère de G' , trivial sur le sous-grou -
pe métacyclique G et provenant d'un caractère irréductible du centre R ;
puis, pour tout caractère ψ de T' , écrivons :

$$x_\psi = \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathfrak{z}^\psi, \quad y_\psi = \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathfrak{y}^\psi, \quad \text{et} \quad z_\psi = \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathfrak{z}^\psi.$$

Alors, les participations des divers facteurs indécompos -
bles aux décompositions de $\mathfrak{C}_N/\mathfrak{z}_N$ et u_N^* sont respectivement mesurées
par les indices suivant :

$$m_{\varphi\chi}^* = \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^\delta)^{\varphi\chi^i} = y_{\varphi\chi}^i + z_{\varphi\chi}^i - \frac{1 - \ell^{1-s}}{n(\ell-1)} \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^\ell)^{\varphi}.$$

$$u_{\varphi\chi}^* = y_{\varphi\chi}^i + z_{\varphi\chi}^{i-1} + (x_{\varphi\chi}^i - x_{\varphi\chi}^{i-1}) - \frac{1 - \ell^{1-s}}{n(\ell-1)} \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^\ell)^{\varphi}.$$

Démonstration :

Ainsi que nous l'avons remarqué , la dimension cherchée $m_{\varphi\chi}^{\star i}$ est donnée par la formule :

$$m_{\varphi\chi}^{\star i} = \dim_{\mathbb{F}_\ell} \left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^\delta \right)^{\varphi\chi^i} = \dim_{\mathbb{F}_\ell} \left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^{\delta^s} \right)^{\varphi\chi^i} - \frac{\ell^s - 1}{n} \dim_{\mathbb{F}_\ell} \left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^\delta \right)^{\varphi} .$$

Le premier terme du membre de droite est égal à $y_{\varphi\chi}^i + z_{\varphi\chi}^i$ d'après la proposition . Et , par le théorème de structure , le second terme est en - core :

$$\frac{\ell^{s-1} - 1}{n} \dim_{\mathbb{F}_\ell} \left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^\delta \right)^{\varphi} = \frac{\ell^{s-1} - 1}{n} \frac{1}{(\ell - 1)\ell^{s-1}} \dim_{\mathbb{F}_\ell} \left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^\ell \right)^{\varphi} = \frac{1 - \ell^{1-s}}{n(\ell - 1)} \dim_{\mathbb{F}_\ell} \left(\mathfrak{M}/\mathfrak{M}^\ell \right)^{\varphi}$$

Un résultat analogue vaut pour $u_{\varphi\chi}^{\star i}$.

Corollaire 2 . Pour tout idempotent e_φ de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G']$, les indices d'unités $a_\varphi^{\star}$ et $b_\varphi^{\star}$, définis par :

$$a_\varphi^{\star} = \left[(\mathfrak{E}_N/\mathfrak{B}_N)^{\varphi} : \prod_{k=0}^{\ell^s-1} (\mathfrak{E}_L^{\sigma^k}/\mathfrak{B}_L^{\sigma^k})^{\varphi} \right] \quad \text{et} \quad b_\varphi^{\star} = \left[u_N^{\star\varphi} : \prod_{k=0}^{\ell^s-1} (u_L^{\star\sigma^k})^{\varphi} \right]$$

sont donnés par les relations :

$$a_\varphi^{\star} = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) m_{\varphi\chi^i}^{\star} \quad \text{et} \quad b_\varphi^{\star} = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) u_{\varphi\chi^i}^{\star} .$$

Corollaire 3 . En particulier , l'écart $a_\varphi^{\star} - b_\varphi^{\star}$ est mesuré par la quantité :

$$a_\varphi^{\star} - b_\varphi^{\star} = (z_\varphi - n z_{\varphi\chi^\circ}) - (x_\varphi - n x_{\varphi\chi^\circ}) ;$$

ce qui s'écrit encore :

$$a_\varphi^{\star} - b_\varphi^{\star} = \frac{[(\mathfrak{E}_N^{\vee s}/\mathfrak{B}_N^{\vee s}(\mathfrak{E}_N^{\vee s} \cap u_N))^{\varphi}]}{[(\mathfrak{E}_N^{\vee s}/\mathfrak{B}_N^{\vee s}(\mathfrak{E}_N^{\vee s} \cap u_N))^{\varphi\chi^\circ}]^n} = \frac{[(u_N^{\vee s}/u_N^{\vee s} \cap u_{N^{s-1}})^{\varphi}]}{[(u_N^{\vee s}/u_N^{\vee s} \cap u_{N^{s-1}})^{\varphi\chi^\circ}]^n} .$$

Démonstrations :

Ecrivons la décomposition indécomposable du module $\mathfrak{E}_N/\mathfrak{B}_N$. Dans l'isomorphisme $(\mathfrak{E}_N/\mathfrak{B}_N)^{\varphi} \simeq \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}^{\alpha} e_{\varphi}$, le sous-module engendré par

la composante isotypique de caractère $\varphi\chi^\circ$ est donné par le produit étendu aux groupes d'unités des conjugués du corps L' des invariants de T :

$\prod_{k=0}^{\ell^s-1} (\mathfrak{E}_{L'}^{\sigma^k}/\mathfrak{B}_{L'}^{\sigma^k})^{\varphi} \simeq \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}^{n[(\alpha+n-1)/n]} e_{\varphi}$, de sorte que la ℓ -valuation du

quotient $(\mathfrak{E}_N/\mathfrak{B}_N \prod_{k=0}^{\ell^s-1} \mathfrak{E}_{L'}^{\sigma^k})^{\varphi}$ est exactement :

$$a_{\varphi}^{\star} = \sum_{\alpha} (\alpha - n[(\alpha+n-1)/n]) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) m_{\varphi\chi^i}^{\star}.$$

Un calcul analogue vaut pour $b_{\varphi}^{\star}$. D'où :

$$a_{\varphi}^{\star} - b_{\varphi}^{\star} = \sum_{i=1}^n (n-i) (m_{\varphi\chi^i}^{\star} - u_{\varphi\chi^i}^{\star}) = \sum_{i=1}^n [(z_{\varphi\chi^i} - z_{\varphi\chi^{i-1}}) - (x_{\varphi\chi^i} - x_{\varphi\chi^{i-1}})],$$

ce qui s'écrit encore :

$$a_{\varphi}^{\star} - b_{\varphi}^{\star} = (z_{\varphi} - n z_{\varphi\chi^0}) - (x_{\varphi} - n x_{\varphi\chi^0}).$$

L'isomorphisme déjà utilisé $\mathbb{G}_N/\mathbb{B}_N \mathbb{G}_N^{\star} \simeq \mathbb{G}_N/\mathbb{B}_N \tilde{\mathbb{G}}_N \oplus \tilde{\mathbb{G}}_N/\mathbb{G}_N^{\star}$ nous donne la formule attendue, qui généralise le résultat de la proposition V.3.

§ 3. La donnée du corps L' des invariants de T suffisant à déterminer sa clôture galoisienne N , il est légitime d'espérer atteindre les divers indices définissant la structure des groupes d'unités de N , à partir de congruences sur les seules unités de L' .

Considérons par exemple le module $u_{\varphi}^{\star}$ des classes d'unités relatives. Dans la suite exacte courte de $\mathbb{Z}_{\ell}[G']$ -modules :

$$1 \longrightarrow \tilde{\mathbb{G}}_N/\mathbb{G}_N^{\star} \longrightarrow u_N^{\star} \longrightarrow \mathbb{G}_N^{\star}/u_N^{\star} \longrightarrow 1$$

le noyau $\tilde{\mathbb{G}}_N/\mathbb{G}_N^{\star}$, isomorphe à $\mathbb{Z}$, est d'ordre ℓ ou 1 suivant que K contient ou non une racine ℓ -primaire de l'unité n appartenant pas au sous-groupe $N_{N/N^{s-1}(E_N)}$.

Cela étant :

Proposition V.6. Soient e_{φ} un idempotent central de l'algèbre $\mathbb{Z}_{\ell}[G']$ associé à un caractère irréductible du centre R , puis, pour tout $i = 1, \dots, n$, le sous-groupe de $\mathbb{G}^{\star\varphi\chi^0}$ défini par :

$$\mathbb{G}_i^{\star\varphi\chi^0} = \{ \eta \in \mathbb{G}_N^{\star\varphi\chi^0} \mid \eta^{\delta^{\ell^{s-1}(\ell-1)-n+i}} \in \mathbb{G}_N^{\star\ell} u_N^{\star} \}.$$

Il vient alors : $\dim_{\mathbb{F}_{\ell}} (\mathbb{G}_i^{\star\varphi\chi^0} / (\mathbb{G}_N^{\star\ell} u_N^{\star})^{\varphi\chi^0}) = \sum_{j=1}^i (u_{\varphi\chi^j}^{\star} - x_{\varphi\chi^j})$.

Démonstration :

Dans l'isomorphisme $(\mathbb{G}_N^{\star}/u_N^{\star})^{\varphi} \simeq e_{\varphi} \oplus_{\alpha} \mathfrak{g}^{\alpha}$, le $\mathbb{Z}_{\ell}[T']$ -module isotypique de caractère $\varphi\chi^0$ s'écrit :

$$(\mathbb{G}_N^{\star}/u_N^{\star})^{\varphi\chi^0} \simeq e_{\varphi} \oplus_{\alpha} \mathfrak{g}_0^{[(\alpha+n-1)/n]},$$

de sorte que le quotient $\mathbb{G}^{\star\varphi\chi^0}/u^{\star\varphi\chi^0}$ est précisément :

$$\mathbb{G}_i^{\star\varphi\chi^0}/u_N^{\star\varphi\chi^0} \simeq e_{\varphi} \oplus_{1 \leq \alpha \leq i} \mathfrak{g}_0^{[(\alpha+n-1)/n]}.$$

Ce qui conduit bien à la formule attendue, l'indice $\left(u_{\varphi_X^j}^{-x} u_{\varphi_X^j}^j \right)$ mesurant la participation du module $\mathfrak{L}^j$ à la décomposition de $(\mathfrak{E}_N^*/u_N^*)^\varphi$.

L'intérêt de travailler sur le quotient $\mathfrak{E}_N^*/u_N^*$ plutôt que sur le module u_N^* résulte de la proposition suivante :

Proposition V.7. Etant donné un élément $\eta \in N$, de norme 1 sur N^{s-1} , les solutions (γ, θ) dans $N \times K$ de l'équation diophantienne :

$$\eta^\delta = \gamma^\ell \theta$$

satisfont à la condition normique $\theta = \frac{1}{N_{N/N^{s-1}}(\gamma)}$,

qui s'écrit encore $\theta = \gamma^{-v_s}$.

Pour établir ce point, nous nous appuierons sur le lemme :

Lemme V.8. Pour tout $t = 1, \dots, s$ continuons à noter v_t pour $1 + \sigma^{\ell^{t-1}} + \dots + \sigma^{(\ell-1)\ell^{t-1}}$ et δ_t pour $1 - \sigma^{\ell^{t-1}}$. Il existe un polynôme Q de l'anneau $\mathbb{Z}[X]$, vérifiant l'identité :

$$\delta^{(\ell-1)\ell^{s-1}} = v_s - \ell(1 + \delta Q(\sigma)) \text{ dans } \mathbb{Z}[S].$$

L'élément $\kappa = 1 + \delta Q(\sigma)$ est inversible dans l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[S]$.

Démonstrations :

Plaçons-nous dans l'algèbre $\mathbb{Z}[S]$ et formons des congruences modulo l'idéal $\delta \ell \mathbb{Z}[S]$. D'après le lemme II.6, nous avons :

$\delta^{\ell-1} \equiv v_1 - \ell$, ce qui nous donne $\delta^\ell \equiv \delta(v_1 - \ell) \equiv \delta v_1 = \delta_2$ puis $\delta^{\ell(\ell-1)} \equiv \delta_2^{\ell-1} \equiv v_2 - \ell$ qui entraîne $\delta^\ell \equiv \delta_2(v_2 - \ell) \equiv \delta_2 v_2 = \delta_3$.

Par une récurrence immédiate nous obtenons donc les congruences :

$$\delta^{\ell^{t-1}(\ell-1)} \equiv v_t - \ell, \text{ pour tout } t = 1, \dots, s;$$

ce qui établit la première partie du lemme.

L'élément $\kappa = 1 + \delta Q(\sigma)$ est inversible dans l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[S]$ comme somme d'un inversible et d'un nilpotent topologique.

Considérons maintenant l'équation diophantienne $\eta^\delta = \gamma^\ell \theta$. Puisque par hypothèse η appartient au noyau de v_s , le lemme précédent nous donne l'identité :

$$\gamma^{\delta^{\ell^{s-1}(\ell-1)-1}} = \eta^{\delta^{\ell^{s-1}(\ell-1)}} = \eta^{\nu_s - \ell\kappa} = \eta^{-\ell\kappa}.$$

Il existe donc une racine $\ell^{\text{ième}}$ de l'unité ξ , telle que nous puissions écrire :

$$\gamma^{\delta^{\ell^{s-1}(\ell-1)-1}} = \xi \eta^{-\kappa}.$$

D'après la proposition V.1, ξ est contenue dans E_K . Appliquant δ , nous obtenons donc :

$$\gamma^{-\ell\kappa} \theta^{-\kappa} = \gamma^{\nu_s - \ell\kappa}, \text{ soit } \theta = \theta^{\kappa} = \gamma^{-\nu_s};$$

ce qui démontre la proposition.

Corollaire. Le groupe $\mathbb{G}_i^{\star\varphi\chi^\circ}$ défini dans la proposition V.5 s'écrit encore :

$$\mathbb{G}_i^{\star\varphi\chi^\circ} = \left\{ \eta \in \mathbb{G}_i^{\star\varphi\chi^\circ} \mid \eta^{\delta^{\ell^{s-1}(\ell-1)-n+i}} \in \mathbb{G}_N^\ell \right\};$$

autrement dit, le groupe $\mathbb{G}_i^{\star\varphi\chi^\circ}$ est engendré par les unités relatives de L dont l'image par l'opérateur $\delta^{\ell^{s-1}(\ell-1)-n+i}$ est une puissance $\ell^{\text{ième}}$ dans N .

C'est ce dernier corollaire qui a été programmé pour compléter les tables des corps diédraux $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}, \sqrt{-3}]$.

4 .

CALCUL DE L'INDICE DES UNITES ET APPLICATION A LA FORMULE DES CLASSES

La formule des classes , telle qu'elle est énoncée dans [Mo] ou [Wa] fait intervenir de façon significative un indice d'unités particulier . Plus précisément , lorsque N est une extension métacyclique d'ordre ℓ^n sur un corps de nombres H , cet indice est l'ordre , ℓ -primaire , du quotient :

$$E_N/E_K \prod_{k=0}^{\ell-1} E_L^{\sigma^k} .$$

Ceci nous amène à poser la définition suivante :

Definition . Soit N/H une extension métabélienne d'un corps de nombres , composée directe d'une extension métacyclique et d'une extension abélienne .

Pour tout idempotent central e_φ de $\mathbb{Z}_\ell[G']$, nous appelons indice des φ -unités de N , la ℓ -valuation a_φ du quotient

$$\left(\mathfrak{O}_N/\mathfrak{P}_N \prod_{k=0}^{n-1} \mathfrak{O}_L^{\sigma^k} \right)^\varphi .$$

§ 1 . Prolongeant les résultats de N. Moser et F. Halter - Koch [MHK] , nous avons en effet :

Proposition V.9. Etant donnée une extension métacyclique N de degré $\ell^s n$ sur un corps de nombres H , le quotient $E_N/W_N \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k}$ est un ℓ -groupe fini .

Avant de démontrer ce point par récurrence sur l'exposant s de l'ordre de G , remarquons que dans l'expression $E_N/W_N \prod_k E_L^{\sigma^k}$ le produit $\prod_k E_L^{\sigma^k}$ peut être pris indifféremment pour k décrivant $[0, n-1]$ ou $[0, \ell^s-1]$. En effet :

Remarque . Le produit $\mu_K \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k}$ contient $\prod_{k=0}^{\ell^s-1} E_L^{\sigma^k}$.

Démonstrations :

Etablissons en premier lieu le lemme , et considérons pour cela un élément η de $\prod_{k=0}^{\ell^s-1} E_L^{\sigma^k}$. D'après le théorème V.1 , nous pouvons écrire :

$$\eta = \eta_0 \theta , \text{ pour un } \eta_0 \text{ de } \prod_{k=0}^n E_L^{\sigma^k} \text{ et un } \theta \text{ de } \Delta_N \cap \prod_{k=0}^{\ell^s-1} E_L^{\sigma^k} .$$

Cela étant , d'après la proposition V.2 , l'élément $\theta^{\ell^s} = \theta^{\vee s}$ est dans le produit $\prod_{k=0}^{\ell^s-1} E_L^{\sigma^k}$. Une récurrence immédiate nous montre alors que η peut s'écrire en fait :

$$\eta = \eta_0 \theta , \text{ avec } \eta_0 \in \prod_{k=0}^n E_L^{\sigma^k} , \text{ pour un } \theta \text{ de } E_N \text{ qui vérifie } \theta^{\ell^s} \in H .$$

Par un argument de théorie de Kummer , cette dernière condition nous prouve qu'il existe une racine ℓ -primaire de l'unité ξ , telle que $\xi\theta$ soit une unité de L .

Ainsi $\eta = \xi^{-1}(\eta_0 \xi\theta)$ appartient bien au produit $\mu_K \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k}$; et le lemme est établi .

Considérons alors la quantité $\left[E_N : W_N \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k} \right]$, a priori dans $\overline{\mathbb{N}}$. Nous pouvons écrire :

$$\left[E_N : W_N \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k} \right] = \left[E_N : \Delta_N \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k} \right] \left[\Delta_N \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k} : W_N \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k} \right] .$$

Dans le premier facteur , nous reconnaissons le quotient $(E_N/\Delta_N) / \prod_{k=0}^{n-1} (E_L^{\sigma^k}/\Delta_L^{\sigma^k})$, dont nous savons par la proposition V.4 qu'il est fini et d'ordre ℓ -primaire , égal à ℓ^{a^*} .

Quant au second facteur , il s'écrit $\left[\Delta_N : W_N \left(\Delta_N \cap \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k} \right) \right]$ et l'intersection $\Delta_N \cap \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k}$ se réduit à $\prod_{k=0}^{n-1} \Delta_L^{\sigma^k}$, puisque le produit $\prod_{k=0}^{n-1} (E_L^{\sigma^k}/\Delta_L^{\sigma^k})$ est direct dans E_N/Δ_N . Il vient donc :

$$\left[\Delta_N : W_N \left(\Delta_N \cap \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k} \right) \right] = \frac{\left[\Delta_N : E_{N^{s-1}} \right] \left[E_{N^{s-1}} : W_{N^{s-1}} \prod_{k=0}^{n-1} E_{L^{s-1}}^{\sigma^k} \right]}{\left[W_N \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k} : W_{N^{s-1}} \prod_{k=0}^{n-1} E_{L^{s-1}}^{\sigma^k} \right]}$$

et deux cas se présentent :

- ou bien N/K est une extension kummerienne de type unité, ce qui entraîne $\Delta_N = W_N E_{N^{s-1}}$, puis :

$$\left[\Delta_N : W_N \prod_{k=0}^{n-1} \Delta_L^{\sigma^k} \right] = \left[W_N E_{N^{s-1}} : W_N \prod_{k=0}^{n-1} E_{L^{s-1}}^{\sigma^k} \right] = \left[E_{N^{s-1}} : W_{N^{s-1}} \prod_{k=0}^{n-1} E_{L^{s-1}}^{\sigma^k} \right]$$

- ou bien W_N se réduit à $W_{N^{s-1}}$, et il vient :

$$\left[\Delta_N : W_N \prod_{k=0}^{n-1} \Delta_L^{\sigma^k} \right] = \frac{\left[E_{N^{s-1}} : W_{N^{s-1}} \prod_{k=0}^n E_{L^{s-1}}^{\sigma^k} \right] \left[\Delta_N : E_{N^{s-1}} \right]}{\left[W_{N^{s-1}} \prod_{k=0}^{n-1} \Delta_L^{\sigma^k} : W_{N^{s-1}} \prod_{k=0}^{n-1} E_{L^{s-1}}^{\sigma^k} \right]}$$

et le dénominateur est égal à 1 lorsque Δ_L se réduit à $E_{L^{s-1}}$, à ℓ^n sinon.

Si donc par hypothèse de récurrence le quotient

$E_{N^{s-1}} / W_{N^{s-1}} \prod_{k=0}^{n-1} E_{L^{s-1}}^{\sigma^k}$ est un ℓ -groupe fini, il en est de même du

quotient $E_N / W_N \prod_{k=0}^{n-1} E_L^{\sigma^k}$.

De plus dans chacun des cas, nous obtenons :

Corollaire . Sous les hypothèses de la proposition, l'indice des unités a est donné par la relation :

$$\left[E_N : W_N \prod_{k=0}^n E_L^{\sigma^k} \right] = \frac{\left[\Delta_N : E_{N^{s-1}} \right] \left[W_L : W_{L^{s-1}} \right]^n}{\left[W_N : W_{N^{s-1}} \right] \left[\Delta_L : E_{L^{s-1}} \right]^n} \left[E_{N^{s-1}} : W_{N^{s-1}} \prod_{k=0}^{n-1} E_{L^{s-1}}^{\sigma^k} \right].$$

§ 2. Lorsque N/H est une extension métabélienne, les calculs ci-dessus se généralisent sans peine aux φ -composantes des groupes d'unités.

C'est ainsi que nous pouvons énoncer :

Proposition V.10. Soit N une extension métabélienne d'un corps de nombres H , composée directe d'une extension abélienne et d'une extension métacyclique. Pour tout idempotent central de l'algèbre $Z_\ell[G']$, l'indice a_φ est déterminé par la relation de récurrence :

$$a_\varphi(N^s) = a_\varphi^*(N^s) + a_\varphi(N^{s-1}) + (\tilde{h}_\varphi^*(N^s) - n \tilde{h}_{\varphi\chi}^*(N^s)) - (h_\varphi^*(N^s) - n h_{\varphi\chi}^*(N^s))$$

dans laquelle $\tilde{h}_\varphi^*$ représente la ℓ -valuation de $(\mathfrak{B}_N / \mathfrak{C}_{N^{s-1}})^\varphi$ et h_φ^* celle de $(\mathfrak{B}_N / \mathfrak{B}_{N^{s-1}})^\varphi$.

Dans cette relation, l'indice relatif $a_{\varphi}^{\star}(N^S)$ a fait l'objet d'un calcul dans la section précédente. Plus précisément, si $m_{\varphi\chi}^{\star i}$ désigne la dimension $m_{\varphi\chi}^{\star i} = \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathbb{G}_N / \mathbb{X}_N \mathbb{G}_N^{\delta})^{\varphi\chi^i}$, nous avons vu (prop. V.5, cor. 2) que $a_{\varphi}^{\star}$ s'écrit :

$$a_{\varphi}^{\star}(N^S) = \sum_{i=1}^n (n-i) m_{\varphi\chi^i}^{\star}(N^S).$$

La formule de récurrence de la proposition V.8 suggère l'existence d'un résultat semblable pour l'indice a_{φ} . Pour nous en convaincre, remarquons que nous avons :

Proposition V.11. Pour tout entier $t = 1, \dots, s$, désignons par $m_{\varphi\chi}^i(N^t)$ la di-

mension : $m_{\varphi\chi}^i(N^t) = \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathbb{G}_{N^t} / \mathbb{X}_{N^t} \mathbb{G}_{N^t}^{\delta})^{\varphi\chi^i}$.

L'indice $m_{\varphi\chi}^i$ ainsi défini satisfait alors à la relation de récurrence :

$$m_{\varphi\chi}^i(N^S) = m_{\varphi\chi}^{\star i}(N^S) + m_{\varphi\chi}^i(N^{S-1}) + (\tilde{h}_{\varphi\chi^i}^{\star}(N^S) - \tilde{h}_{\varphi\chi^{i-1}}^{\star}(N^S)) - (h_{\varphi\chi^i}^{\star}(N^S) - h_{\varphi\chi^{i-1}}^{\star}(N^S)).$$

Démonstration :

Considérons l'application naturelle de $\mathbb{G}_N / \mathbb{X}_N \mathbb{G}_N^{\delta}$ sur $\mathbb{G}_N / \mathbb{X}_N \mathbb{G}_N^{\delta}$. Son noyau est le sous-module $\mathbb{X}_N \mathbb{G}_N^{\delta} / \mathbb{X}_N \mathbb{G}_N^{\delta}$, isomorphe au quotient $\mathbb{X}_N / \mathbb{X}_N (\mathbb{X}_N \cap \mathbb{G}_N^{\delta})$. Et puisque le module $\mathbb{G}_N / \mathbb{X}_N$ est libre sur l'anneau cyclotomique $\mathbb{X}^{(\ell^s)} = \mathbb{Z}_{\ell}[\zeta]$ (cf. théorème V.1), l'intersection $\mathbb{X}_N \cap \mathbb{G}_N^{\delta}$ se réduit à $\mathbb{X}_N^{\delta}$; de sorte que nous obtenons la suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathbb{X}_N / \mathbb{X}_N \mathbb{X}_N^{\delta} \longrightarrow \mathbb{G}_N / \mathbb{X}_N \mathbb{G}_N^{\delta} \longrightarrow \mathbb{G}_N / \mathbb{X}_N \mathbb{G}_N^{\delta} \longrightarrow 1.$$

Distinguons alors trois cas :

(i) Si N/K est une extension kummerienne de type unité, nous avons $\mathbb{X}_N = \mathbb{G}_{N^{s-1}} \mathbb{X}_N$ et $\mathbb{X}_N^{\delta} \subset u_K$ de sorte que nous obtenons

$$\mathbb{X}_N / \mathbb{X}_N \mathbb{X}_N^{\delta} \simeq \mathbb{G}_{N^{s-1}} / \mathbb{X}_{N^{s-1}} \mathbb{G}_{N^{s-1}}^{\delta}, \text{ puis :}$$

$$m_{\varphi\chi}^{\star i}(N^S) = m_{\varphi\chi}^{\star i}(N^{S-1}) + m_{\varphi\chi}^i(N^{S-1}) \text{ et } h_{\varphi\chi}^{\star i}(N^S) = \tilde{h}_{\varphi\chi}^{\star i}(N^S).$$

(ii) Si N/N^{s-1} n'est pas une extension kummerienne de type unité, il vient $\mathbb{X}_N = \mathbb{G}_{N^{s-1}}$ et $\mathbb{X}_N = \mathbb{X}_{N^{s-1}}$, soit :

$$m_{\varphi\chi}^i(N^S) = m_{\varphi\chi}^{\star i}(N^S) + m_{\varphi\chi}^i(N^{S-1}) \text{ et } h_{\varphi\chi}^{\star i}(N^S) = \tilde{h}_{\varphi\chi}^{\star i}(N^S) = 0;$$

et la proposition est encore vérifiée.

(iii) Enfin , si N/N^{s-1} est une extension kummerienne de type unité sans que N/K en soit une , nous avons $\mathfrak{B}_N = \mathfrak{B}_{N^{s-1}}$ mais $\mathfrak{B}_N \neq \mathfrak{C}_{N^{s-1}}$ et $\mathfrak{B}_N^\delta \notin \mathfrak{C}_{N^{s-1}}^\delta \mathfrak{B}_{N^{s-1}}$; d'où une suite exacte :

$$1 \longrightarrow (\mathfrak{B}_N \mathfrak{B}_N^\delta / \mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_{N^{s-1}}^\delta)^{\varphi_\chi^i} \longrightarrow (\mathfrak{B}_N / \mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_N^\delta)^{\varphi_\chi^i} \longrightarrow (\mathfrak{B}_N / \mathfrak{B}_N \mathfrak{B}_N^\delta)^{\varphi_\chi^i} \longrightarrow 1,$$

dans laquelle le noyau , image bijective de $(\mathfrak{B}_N / \mathfrak{C}_{N^{s-1}})^{\varphi_\chi^{i-1}}$ par l'opérateur δ a pour valuation $\tilde{h}_{\varphi_\chi^{i-1}}^*$; tandis que le terme médian est donné par la suite exacte courte :

$$1 \longrightarrow (\mathfrak{C}_{N^{s-1}} / \mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_{N^{s-1}}^\delta)^{\varphi_\chi^i} \longrightarrow (\mathfrak{B}_N / \mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_{N^{s-1}}^\delta)^{\varphi_\chi^i} \longrightarrow (\mathfrak{B}_N / \mathfrak{C}_{N^{s-1}}^{s-1})^{\varphi_\chi^i} \longrightarrow 1.$$

Récapitulant ces résultats , nous obtenons :

$$m_{\varphi_\chi^i}(N^s) = m_{\varphi_\chi^i}^*(N^s) + m_{\varphi_\chi^i}(N^{s-1}) + (\tilde{h}_{\varphi_\chi^i}^*(N^s) - \tilde{h}_{\varphi_\chi^{i-1}}^*(N^s)) \text{ et } h_{\varphi_\chi^i}^*(N^s) = 0 ;$$

ce qui achève la démonstration .

§ 3 . Rapprochant les résultats des deux propositions précédentes , nous pouvons écrire :

Théoreme V.3. Soit N une extension métabélienne d'un corps de nombres H , composée directe d'une extension abélienne et d'une extension métacyclique . Pour tout idempotent central e_φ de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G']$, l'indice des φ -unités est mesuré par la quantité :

$$a_\varphi = \sum_{i=1}^n (n-i) m_{\varphi_\chi^i} .$$

Démonstration :

D'après la proposition V.9 , nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (n-i) m_{\varphi_\chi^i}(N^s) &= \sum_{i=1}^n (n-i) m_{\varphi_\chi^i}^*(N^s) + \sum_{i=1}^n (n-i) m_{\varphi_\chi^i}(N^{s-1}) + \\ &+ (\tilde{h}_\varphi^*(N^s) - n \tilde{h}_{\varphi_\chi^0}^*(N^s)) - (h_\varphi^*(N^s) - n h_{\varphi_\chi^0}^*(N^s)) . \end{aligned}$$

Nous reconnaissons $a_\varphi^*(N^s)$ dans le premier terme , et $a_\varphi(N^{s-1})$ dans le second par l'hypothèse de récurrence . D'où le théorème , par la proposition V.8 .

La formule obtenue $a_{\varphi} = \sum_{i=1}^n (n-i) m_{\varphi \chi^i}$ ne faisant pas intervenir les sous-extensions de N/K , on peut légitimement espérer en donner une démonstration directe.

Introduisons pour cela l'élément $\vartheta = \frac{1}{n} \sum_{\tau \in T} \chi(\tau^{-1}) \sigma^{\chi(\tau)}$ de l'algèbre $Z_{\ell}[S]$. Nous avons :

Scolie. Soient $\mathfrak{I}$ un $Z_{\ell}[G']$ -module et $\mathfrak{I}_0$ sa composante isotypique associée à l'idempotent e_{χ} . Le sous-module $\mathfrak{I}'_0$ engendré par $\mathfrak{I}_0$ est donné par la somme directe :

$$\mathfrak{I}'_0 = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathfrak{I}_0^{\vartheta^i} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} (\mathfrak{I}^{\vartheta^i}) \chi^i.$$

En particulier, le quotient $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}'_0$ admet la décomposition directe

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}'_0 = \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^{\vartheta^i}) \chi^i.$$

Démonstration :

Puisque l'élément ϑ est un générateur de l'idéal d'augmentation $\delta Z_{\ell}[S]$, il est clair que le sous-module engendré par $\mathfrak{I}_0$ est donné par $\mathfrak{I}'_0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{I}_0^{\vartheta^i}$. Compte-tenu de la relation de commutation $e_{\chi} \vartheta^{i+1} = \vartheta e_{\chi}^i$

pour tout i modulo n , cette dernière somme s'écrit encore :

$$\mathfrak{I}'_0 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{I} e_{\chi} \vartheta^i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{I}^{\vartheta^i} e_{\chi} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{I}^{\vartheta^i} \chi^i,$$

ce qui est la décomposition annoncée.

Appliquons le scolie au module $(\mathfrak{C}_N/\mathfrak{B}_N)^{\varphi}$.

Nous obtenons la factorisation :

$$\left(\mathfrak{C}_N/\mathfrak{B}_N \prod_{h=0}^{n-1} \mathfrak{C}_L^{\sigma^h} \right)^{\varphi} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n-1} \left(\mathfrak{C}_N/\mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^i} \right)^{\varphi \chi^i}.$$

Et le problème est alors d'évaluer les quotients $\left(\mathfrak{C}_N/\mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^i} \right)^{\varphi \chi^i}$.

Considérons pour cela les quotients $\mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^i} / \mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^{i+1}}$. Pour tout entier i , l'opérateur δ détermine une surjection :

$$\mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^i} / \mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^{i+1}} \xrightarrow{\delta} \mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^{i+1}} / \mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^{i+2}} \longrightarrow 1,$$

dont le noyau est constitué par les classes modulo $\mathfrak{B}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^{i+1}}$ des éléments η

de $\mathfrak{C}_N$ qui vérifient l'équation $\eta^\delta \in \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^{i+2}$. Un tel élément s'écrit $\eta = \eta_0^{\delta^{i+1}} \theta$, avec $\theta^\delta \in \mathfrak{W}_N$, pour un η_0 de $\mathfrak{C}_N$; et la condition $\theta^\delta \in \mathfrak{W}_N$ s'écrit $\theta^{\delta \ell^s} \in E_K$, i.e. $\theta^{\ell^s \delta} \in \mu_K$; puis $\theta^{p^\delta} = 1$, pour un entier p convenable. Autrement dit $\theta^p \in E_K$, ce qui entraîne $\theta \in \mathfrak{W}_N$.

L'application considérée est donc une bijection; d'où les isomorphismes de groupes :

$$(\mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^{i+1}} / \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^{i+2}})^{\varphi \chi^{j+1}} \simeq (\mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^i} / \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^{i-1}})^{\varphi \chi^j} \simeq \dots \simeq (\mathfrak{C}_N / \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^\delta)^{\varphi \chi^{j-1}}$$

Ce qui nous donne finalement l'identité :

$$a_\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^i \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^{j-1}} / \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^{\delta^j}) \chi^j \right) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i m_{\varphi \chi^{i-j+1}}$$

qui redémontre le théorème.

Proposition V.12. Pour tout idempotent central e_φ et tout entier i modulo n ,

désignons par $r_{\varphi \chi^i}$ le $\varphi \chi^i$ -rang du groupe u_N , i.e. $r_{\varphi \chi^i} = \dim_{\mathbb{F}_\ell} (\mathfrak{C}_K / \mathfrak{C}_K^{\ell^i} u_K)^{\varphi \chi^i}$.

L'indice $m_{\varphi \chi^i}$ est mesuré par la quantité :

$$m_{\varphi \chi^i} = q_{\varphi \chi^i} - p_{\varphi \chi^i} + s r_{\varphi \chi^i} - \left(h_{\varphi \chi^i} - h_{\varphi \chi^{i-1}} \right).$$

Les termes $q_{\varphi \chi^i}$ et $p_{\varphi \chi^i}$ correspondent au quotient de Herbrand, et h à l'exposant de Hasse.

Démonstration :

Notons $\mathfrak{C}^*$ le groupe des unités de $\mathfrak{C}_N$ de norme 1 sur K (cf. Ch. IV, 2 § 1), puis $\mathfrak{W}_N^* = \mathfrak{W}_N \cap \mathfrak{C}_N^* = u^*$.

Nous avons une suite exacte de G' -modules :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^* / \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^\delta \longrightarrow \mathfrak{C}_N / \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^\delta \xrightarrow{\text{Norme}} \mathfrak{C}_K / \mathfrak{W}_N^{\ell^\delta} \longrightarrow \mathfrak{C}_K / \mathfrak{C}_N^\delta \longrightarrow 1,$$

dans laquelle le terme $\mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^* / \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^\delta$ est donné par la suite courte :

$$1 \longrightarrow u_N^* / (\mathfrak{W}_N \cap \mathfrak{C}_N^\delta) \longrightarrow \mathfrak{C}_N^* / \mathfrak{C}_N^* / \mathfrak{C}_N^\delta \longrightarrow \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^* / \mathfrak{W}_N \mathfrak{C}_N^\delta \longrightarrow 1.$$

Enfin, le dénominateur $\mathfrak{W}_N \cap \mathfrak{C}_N^\delta$ est l'image bijective par δ du quotient

$\mathfrak{W}_N / \mathfrak{C}_K$ isomorphe à $\mathfrak{W}_N^{\ell^s} / \mathfrak{C}_K^{\ell^s}$; ce qui s'écrit :

$$|(\mathbb{B}_N \cap \mathbb{C}_N^\delta)^{\varphi\chi^i}| = |(\mathbb{B}_N/\mathbb{C})^{\varphi\chi^{i-1}}| = |(\mathbb{B}_N^{\ell^s}:\mathbb{C}^{\ell^s})^{\varphi\chi^{i-1}}|.$$

La valeur de l'indice cherché s'obtient alors en écrivant que la somme alternée des ℓ -valuations est nulle dans chacune des suites exactes .

Puis , par sommation sur les composantes , nous obtenons :

Corollaire . Avec les notations de la proposition , l'indice des φ -unités s'écrit :

$$a_\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \left(q_{\varphi\chi^i} - p_{\varphi\chi^i} \right) + s \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) r_{\varphi\chi^i} + (h_\varphi - n h_{\varphi\chi^0}).$$

Ce dernier résultat , confronté à la formule des classes (th. IV.4, cor.2) , nous conduit à l'énoncé suivant ; qui reprend dans sa forme celui de [Mo 2] .

Theoreme V.3 : Formule des classes (deuxième forme) .

Etant donnée une extension métabélienne N/K de degré $\ell^s n$, composée directe d'une extension abélienne et d'une extension métacyclique , les nombres de φ -classes sont liés par la relation :

$$h_\varphi - n h_{\varphi\chi^0} = (k_\varphi - n k_{\varphi\chi^0}) + a_\varphi - s(n-1) \langle \varphi, 1_R \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} s(n-i) r_{\varphi\chi^i} - (h_\varphi - n h_{\varphi\chi^0}).$$

5 . STRUCTURE DU GROUPE DES UNITES D'UNE EXTENSION METABELIENNE DE DEGRE $\ell n'$.

Nous appliquons aux groupes d'unités $\mathfrak{E}^\varphi$ d'une extension métabelienne relative de degré $\ell n'$ les théorèmes de structure du chapitre II , sections 4 et 5 .

§ 1 . Considérons en premier lieu le module u_N^φ des φ -unités de N modulo la torsion . D'après le théorème II.5 , nous pouvons écrire :

Théoreme V.4 . Etant donné une extension métabelienne N/H de degré $\ell n'$, et e_φ un idempotent central de l'algèbre $\mathbb{Z}_\ell[G']$, associé à un caractère irréductible du centre , le quotient $u_N^\varphi = \mathfrak{E}_N^\varphi / u_N^\varphi$ du groupe des φ -unités de N admet une décomposition directe de la forme :

$$u_N^\varphi \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^{n-1} \left[\left(\bigoplus_{j=1}^t \varphi \chi^i \Gamma_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^s \varphi \chi^i \Xi_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^g \varphi \chi^i \mathfrak{A}^i \right) \right] .$$

Et, dans cet isomorphisme, le sous-groupe $\mathfrak{B}_N^\varphi / u_N^\varphi$ s'identifie à la somme directe :

$$\mathfrak{B}_N^\varphi / u_N^\varphi \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^{n-1} \bigoplus_{j=0}^t \varphi \chi^i + s \varphi \chi^i \Gamma_i .$$

Corollaire . Introduisons les trois $\mathbb{F}_\ell[G']$ -modules :

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{B}_N / \mathfrak{E}_N^\vee u_K , \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{E}_N / \tilde{\mathfrak{E}}_N \mathfrak{B}_N \quad \text{et} \quad \mathfrak{G} = \tilde{\mathfrak{E}}_N / \mathfrak{E}_N^\delta u_N .$$

Alors , dans la décomposition de $\mathfrak{E}_N^\varphi$,

$$\begin{aligned} \text{la participation de } \Gamma_i \text{ est comptée par } t_{\varphi \chi^i} &= \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathfrak{I}^{\varphi \chi^i} , \\ \text{la participation de } \Xi_i \text{ est comptée par } s_{\varphi \chi^i} &= \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathfrak{S}^{\varphi \chi^i} , \\ \text{la participation de } \mathfrak{A}^i \text{ est comptée par } g_{\varphi \chi^i} &= \dim_{\mathbb{F}_\ell} \mathfrak{G}^{\varphi \chi^i} . \end{aligned}$$

Démonstration :

La décomposition écrite est celle du chapitre II . Par le corollaire 2 à la proposition II.2 , le sous-module fixé par S est le quotient $\mathfrak{B}_N / u_N$. Il suit :

$$\mathfrak{B}_N^\varphi / u_N^\varphi \simeq e_\varphi \bigoplus_{i=0}^{n-1} \left[\left(\bigoplus_{j=1}^t \varphi \chi^i \Gamma_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^s \varphi \chi^i \vee \Xi_i \right) \right] , \quad \text{avec } \vee \Xi_i \simeq \Gamma_i \text{ pour tout } i \pmod{n} .$$

D'autre part , si $u_N^* = \mathfrak{E}_N / u_N$ désigne le noyau de l'opérateur norme , il vient :

$$\mathfrak{E}_N^{\varphi} / u_N^{\varphi} \simeq e_{\varphi} \bigoplus_{i=0}^{n-1} \left[\left(\bigoplus_{j=1}^s \varphi \chi^i \delta_{\Xi_i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^g \varphi \chi^i \mathfrak{g}^i \right) \right] , \text{ avec } \delta_{\Xi_i} \simeq \mathfrak{g}^{i+1} \text{ pour tout } i \pmod{n}.$$

D'où les décompositions :

$$\mathfrak{T}^{\varphi \chi^i} \simeq e_{\varphi} \bigoplus_{j=1}^t \varphi \chi^i \Gamma_i / \ell \Gamma_i , \quad \mathfrak{S}^{\varphi \chi^i} \simeq e_{\varphi} \bigoplus_{j=1}^s \varphi \chi^i \Xi_i / \ell \Gamma_i , \quad \mathfrak{G}^{\varphi \chi^i} \simeq e_{\varphi} \bigoplus_{j=1}^g \varphi \chi^i \mathfrak{g}^i / \mathfrak{g}^{i+1} ;$$

ce qui établit le corollaire .

D'après la décomposition du quotient $\mathfrak{E}_N^{\varphi} / u_N^{\varphi}$, la quantité $t_{\varphi \chi^i} + s_{\varphi \chi^i}$ est exactement le rang de la $\varphi \chi^i$ -composante du groupe u_K . Sa détermination ne présente donc aucune difficulté :

Proposition V.13. Pour toute place à l'infini $\mathfrak{p}$ de H , notons $\chi_{\mathfrak{p}}$ le caractère de T' , induit de celui de la représentation unité du sous-groupe de décomposition de $\mathfrak{p}$ dans l'extension K/H , puis $e_{\mathfrak{p}}$ son indice de ramification . Pour chaque caractère ψ du groupe T' , l'indice $r_{\psi} = t_{\psi} + s_{\psi}$ est donné par la formule :

$$r_{\psi} + \langle \psi , 1_{T'} \rangle = \sum_{\mathfrak{p}} \langle \psi , \chi_{\mathfrak{p}} \rangle .$$

Démonstration :

En effet , d'après le théorème de Herbrand sur les unités [cf.[Ma]] , la représentation du groupe T' de module $\mathbb{Q} \oplus \left(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} E_K \right)$ est la somme des induites des représentations unités des sous-groupes de décompositions attachés aux places à l'infini de H .

Tensorisant par $\mathbb{Q}_{\ell}$, nous obtenons le résultat annoncé .

Lorsque le corps K ne contient pas les racines $\ell^{\text{ièmes}}$ de l'unité , les groupes $\mathfrak{E}_N$ et u_N sont identiques et les indices t et g qui définissent la structure de u_N coïncident avec les quantités p et q qui interviennent dans la formule des classes ambiges .

§ 2 . Considérons maintenant le cas où le corps K contient les racines $\ell^{\text{ièmes}}$ de l'unité mais non les racines $\ell^{2-\text{ièmes}}$. Alors , d'après le théorème II.6 , si $\varphi \chi^1$ est le caractère du sous-module u_N des racines de l'unité dans $\mathfrak{E}_N$, la décomposition indécomposable de $\mathfrak{E}_N$ s'obtient à partir de celle de u_N ,

- soit en ajoutant le facteur direct $u_N = e_{\varphi \Gamma_i} \ell \Gamma_i$.
- soit en substituant à un facteur $e_{\varphi \mathfrak{B}^i}$ le terme $e_{\varphi \Xi_i} / \ell \nu \Xi_i$.
- soit en substituant à un facteur $e_{\varphi \Gamma_{i+1}}$ le terme $e_{\varphi \Xi_i} / \ell \delta \Xi_i$.
- soit en substituant à une somme $e_{\varphi (\mathfrak{B}^i \oplus \Gamma_{i+1})}$ le terme Θ_i .

Comme nous l'avons vu l'alternative précédente est gouvernée par les deux équations :

$\zeta \in \mathbb{G}_N^\nu$ et $\zeta \in \mathbb{G}_N^\delta$, où ζ désigne une racine $\ell^{\text{ième}}$ primitive.

La première équation donne lieu à une condition dure .

Une façon de l'attaquer consiste à vérifier en premier lieu si ζ est une norme dans l'extension N/K ; puis , ce point établi , à comparer les groupes $E_K \cap N_{N/K}(N)$ et $N_{N/K}(E_N)$, ce qui peut se faire au moyen de la proposition IV.3 qui relie unités et classes ambiges . Quant à la condition $\zeta \in N_{N/K}(N)$, elle se lit localement , en vertu du théorème des normes de Hasse . Plus précisément , si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de K qui se ramifie modérément dans N/K , la racine ζ est une norme dans l'extension N/K si et seulement si le symbole de Legendre

$$\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{p}} \right) = \zeta^{(N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})-1)/\ell}$$
 est égal à 1 .

La seconde condition , par contre , est plus accessible .

En effet l'identité $\eta^\theta = \zeta$, pour une unité η de E_N , a lieu , d'après la proposition V.2 , lorsque N est une extension kummerienne de type unité sur K .

Illustrons cette discussion par quelques exemples :

Exemple 1 . Soit $N = \mathbb{Q}[\sqrt[\ell]{p}, \zeta]$, ℓ premier régulier et p premier primitif $(\text{mod}^* \ell)$, avec $p^{\ell-1} \not\equiv 1 \pmod{\ell^2}$. (Par exemple $N = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \zeta_3]$). Le corps N est une extension métacyclique de degré $\ell(\ell-1)$ sur $\mathbb{Q}$, ramifiée en $\mathfrak{B}$ et en $\mathfrak{p}$ au-dessus du corps cyclotomique , et de groupe des ℓ -classes trivial . Le groupe des unités $\mathbb{G}_N$ est isomorphe à la somme directe : $\mathbb{G}_N \simeq \Gamma_1 / \ell \Gamma_1 \oplus \mathfrak{B} \oplus \Xi_2 \oplus \Xi_4 \oplus \dots \oplus \Xi_{\ell-1}$.

En effet , p qui est pris primitif $(\text{mod}^* \ell)$ est inerte dans le corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta]$. Le symbole de Legendre $\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{p}} \right)$ s'écrit donc

$$\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{p}} \right) = \zeta^{(N(\mathfrak{p})-1)/\ell} = \zeta^{(p^{\ell-1}-1)/\ell}$$
 et il est distinct de 1 par hypothèse ;

ce qui prouve que ζ n'est pas norme dans l'extension $N/\mathbb{Q}[\zeta]$. En particulier , d'après la formule du produit , l'extension $N/\mathbb{Q}[\zeta]$ est donc ramifiée en deux places au moins , c'est-à-dire ici en $\mathfrak{B}$ et en $\mathfrak{p}$. La formule

des classes ambiges nous donne alors $\rho = 0$, de sorte (prop.IV.2) que le groupe des ℓ -classes de N est réduit à 1. De l'égalité $r = r_{\chi} = 2$, il suit $w = w_{\chi} = 1$ (Ch.IV.3, § 3, cor.) puis $p = p_{\chi} = 1$ (prop.IV.3) et enfin $q = q_{\chi} = 2$ (Ch.IV.2, § 3, scol.). D'où la décomposition annoncée, d'après la proposition V.13.

Exemple 2. Soit $N = \mathbb{Q}[\sqrt[\ell]{\ell}, \zeta]$, avec ℓ premier régulier. (Par exemple $N = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{3}, \zeta_3]$). Le corps N est une extension métacyclique de degré $\ell(\ell-1)$ sur $\mathbb{Q}$, ramifiée en $\mathfrak{B}$ au-dessus du corps cyclotomique, et de groupe des ℓ -classes trivial. Le groupe des unités $\mathfrak{E}_N$ est isomorphe à la somme directe :

$$\mathfrak{E}_N \simeq \Xi_1 / \nu \ell \Xi_1 \oplus \Xi_2 \oplus \Xi_4 \oplus \dots \oplus \Xi_{\ell-1}.$$

Le nombre premier ℓ étant supposé régulier, l'extension $N/\mathbb{Q}[\zeta]$ est ramifiée d'après la théorie du corps de classes, et le groupe des ℓ -classes de N est trivial d'après la formule des classes ambiges. Il vient donc $r = r_{\chi} = 1$, puis $p = w = w_{\chi} = p_{\chi} = 0$ et enfin $q = q_{\chi} = 1$, par les mêmes arguments que plus haut. Ainsi ζ est dans $\mathfrak{E}_N^{\nu}$, mais non dans $\mathfrak{E}_N^{\delta}$ puisque l'extension $N/\mathbb{Q}[\zeta]$ n'est pas de type unité.

Exemple 3. Soit $N = \mathbb{Q}[\sqrt[\ell]{\eta}, \zeta]$, avec ℓ premier régulier, $\ell \equiv 1 \pmod{4}$ et η une unité fondamentale du corps quadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{\ell}]$. (Par exemple $N = \mathbb{Q}[\sqrt[5]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \zeta_5]$).

Le corps N est une extension métacyclique de degré $\ell(\ell-1)$ sur $\mathbb{Q}$, qui est ramifiée en $\mathfrak{B}$ au-dessus du corps cyclotomique, et de groupe des ℓ -classes trivial. Le groupe des unités $\mathfrak{E}_N$ est isomorphe à la somme directe :

$$\mathfrak{E}_N \simeq \Xi_2 \oplus \Xi_4 \oplus \dots \oplus \Xi_{(\ell-5)/2} \oplus \Xi_{(\ell+1)/2} \oplus \Xi_{(\ell+3)/2} \oplus \dots \oplus \Xi_{\ell-1}.$$

Le corps N est évidemment une extension métacyclique de degré $\ell(\ell-1)/2$ sur le corps quadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{\ell}]$. Or, puisque la conjugaison complexe échange η et η^{-1} , il est facile de vérifier que N est galoisienne puis métacyclique sur $\mathbb{Q}$, et que si χ est le caractère de l'action de $\text{Gal}(\mathbb{Q}^{(\ell)}/\mathbb{Q})$ sur $\text{Gal}(N/\mathbb{Q}^{(\ell)})$ et ψ celui de l'action sur μ_{ℓ} , il suit $\psi = \chi^{(\ell+1)/2}$. Le raisonnement se poursuit alors comme plus haut, à ceci près que nous avons ici $\zeta \in \mathfrak{E}_N^{\delta}$.

§ 3 . Etudions pour conclure le cas d'une extension métacyclique de degré ℓn sur le corps des rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire .

Distinguons pour cela deux cas , suivant que la sous-extension cyclique K/H est ramifiée ou non à l'infini ; et posons $m = \frac{n}{2}$ dans le premier cas , $m = n$ dans le second . Dans l'une et l'autre hypothèse nous avons :

$$\text{rg } U_K = m-1 \quad \text{rg } U_L = \frac{m}{n}(\ell-1) \quad \text{rg } U_N = m\ell-1 = n \text{rg } U_L + \text{rg } U_K,$$

par le théorème de Dirichlet .

Le théorème V.4 prend alors la forme suivante :

Théorème V.5 . Soit N/H une extension métacyclique de degré ℓn sur le corps des rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire .

Le groupe U_K des unités de K modulo la torsion s'écrit comme somme directe :

$$U_K \simeq \bigoplus_{i=1}^{m-1} \Gamma_{\frac{n}{m}i}, \text{ où } m \text{ vaut } n \text{ ou } \frac{n}{2} \text{ suivant la ramification à l'infini .}$$

Tandis que le groupe U_N admet une décomposition de la forme :

$$U_N \simeq \left(\bigoplus_{k=1}^t \Gamma_{i_k} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=t+1}^{m-1} \Xi_{i_k} \right) \oplus \left(\bigoplus_{k=m}^{m+t+2} \mathfrak{S}^{i_k} \right),$$

où les indices i_k parcourent $\left\{ \frac{n}{m}, \frac{2n}{m}, \dots, (m-1) \frac{n}{m} \right\}$ quand k parcourt $\{1, 2, \dots, m-1\}$.

Enfin , lorsque K/H est l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}[\zeta]/\mathbb{Q}$, pour un ℓ régulier , le groupe $\mathfrak{E}_N$ s'obtient à partir de U_N , soit par addition du terme $\Gamma_1/\ell\Gamma_1$ (exemple 1) , soit par substitution de $\Xi_1/\ell\vee\Xi_1$ à un terme $\mathfrak{S}$ (exemple 2) , soit encore par substitution de Θ_t à un terme $\Gamma_{t-1} \oplus \mathfrak{S}^t$ (exemple 3)

Démonstration :

La structure du groupe U_K est donnée par la proposition V.13. Il suffit alors d'appliquer le théorème V.4 en ajustant au rang le nombre de facteurs de la décomposition . Enfin sous la condition $\zeta \in \mathfrak{E}_N^\delta$, l'extension N/K n'est pas ramifiée en dehors de ℓ , et ceci entraîne $\zeta \in \mathfrak{E}_N^\vee$.

En particulier , le problème se pose de la monogénéité du groupe U_N ; ce qui nous amène à poser :

Définition . Etant donnée une extension métacyclique N/H de degré ℓn sur le corps des rationnels ou sur un corps quadratique imaginaire , nous disons qu'il existe une unité de Minkovski pour u_N , lorsque le module u_N est $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -monogène ; et une unité de Minkovski relative lorsque le quotient u_N/u_K est $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -monogène .

Proposition V.14. Sous les hypothèses de la définition , les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Le module u_N est $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -monogène . Autrement dit , il existe une unité de E_N dont les conjuguées engendrent un sous-groupe de U_N d'indice premier à ℓ .

(ii) Le $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -module est isomorphe au quotient $\mathbb{Z}_\ell[G](1+\tau^m)/\mu\nu\mathbb{Z}_\ell$ où m vaut $n/2$ ou n suivant que l'extension K/H est ramifiée ou non à l'infini , et μ désigne l'opérateur norme $\sum_{\tau \in T} \tau$.

(iii) La décomposition indécomposable de u_N s'écrit :

$$u_N \simeq \mathfrak{g}^0 \oplus \Xi_{n/m} \oplus \Xi_{2n/m} \oplus \dots \oplus \Xi_{(m-1)n/m}$$

(iv) Il existe une unité de Minkovski relative , et l'opérateur norme envoie u_N sur u_K .

Démonstration :

L'équivalence des deux premières assertions résulte immédiatement du théorème de Herbrand . Quant à l'assertion (iii) , elle traduit tout simplement l'isomorphisme :

$$\mathbb{Z}_\ell[G](1+\tau^m) / \mu\nu\mathbb{Z}_\ell \simeq \Xi_0/\Gamma_0 \oplus \Xi_{n/m} \oplus \Xi_{2n/m} \oplus \dots \oplus \Xi_{(m-1)n/m} .$$

Enfin , si u_N admet la décomposition

$u_N \simeq \mathfrak{g}^0 \oplus \Xi_{n/m} \oplus \Xi_{2n/m} \oplus \dots \oplus \Xi_{(m-1)n/m}$, le sous-module des normes s'écrit : $u_N^\vee = u_N = \Gamma_{n/m} \oplus \Gamma_{2n/m} \oplus \dots \oplus \Gamma_{(m-1)n/m}$; et le quotient u_N/u_K est isomorphe au module monogène

$$u_N/u_K \simeq \bigoplus_{k=0}^{m-1} \mathfrak{g}^{kn/m} \simeq \mathbb{Z}_\ell[G](1+\tau^m) / \nu\mathbb{Z}_\ell[T] .$$

Réciproquement lorsque la norme ν envoie u_N sur u_K , le théorème V.5 nous donne l'isomorphisme $u_N \simeq \mathfrak{g}^i \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{m-1} \Xi_{kn/m} \right)$, pour un i convenable (mod n) ; et le quotient u_N/u_K est $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -monogène si et seulement si l'indice i est distinct des kn/m , pour $k = 1, \dots, (m-1)$. Puisque , dans le cas ramifié , la conjugaison complexe τ^m opère trivia-

lement sur u_N , nous obtenons en toutes hypothèses $\iota \equiv 0 \pmod{n}$; ce qui achève la démonstration.

Remarque. Soit N/Q une extension métacyclique réelle, de degré ℓn . Lorsqu'il existe une unité de Minkovski pour $\mathfrak{E}_N$, le sous-module $\mathfrak{E}_N^*$ des unités de norme 1 s'écrit :

$$\mathfrak{E}_N^* \simeq \mathfrak{I}^0 \oplus \mathfrak{I}^0 \oplus \mathfrak{I}^2 \oplus \mathfrak{I}^3 \oplus \dots \oplus \mathfrak{I}^{n-2},$$

et n'est donc pas $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -monogène, contrairement au quotient $\mathfrak{E}_N/\mathfrak{E}_K$.

Ceci justifie donc le choix de u_N/u_K , plutôt que de u_N^* pour définir une unité de Minkovski relative.

Donnons pour finir quelques exemples donnant lieu à une unité de Minkovski :

Théoreme V.6. Soient K un corps cyclique réel de degré n , et ℓ un nombre premier impair, $\ell \equiv 1 \pmod{n}$. Si le ℓ -groupe des classes de K est cyclique et non contenu dans un sous-corps strict de K , l'unique ℓ -extension abélienne non ramifiée de degré ℓ de K est une extension métacyclique de Q , et le groupe de ses unités $\mathfrak{E}_N$ admet la décomposition

$$\mathfrak{E}_N \simeq \mathfrak{I}^2 \oplus \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{E}_{n-1}.$$

Corollaire. Soient ℓ un nombre premier impair et K un corps quadratique réel dont le ℓ -groupe des classes est cyclique. Alors la sous-extension de degré ℓ de son corps de classes de Hilbert est une extension diédrale de Q qui possède une unité de Minkovski.

Démonstration :

Notons T le groupe de Galois $\text{Gal}(K/Q)$ et ℓ^s la ℓ -partie du nombre de classes de K . Le ℓ -corps de classes de Hilbert $\tilde{K}$ de K est une extension galoisienne de degré $\ell^s n$ sur Q et son groupe de Galois $\text{Gal}(\tilde{K}/Q)$ s'identifie au produit semi-direct de $\mathfrak{H}_K$ par T . Et puisque le groupe $\mathfrak{H}_K$ n'est contenu dans aucun sous-corps strict de K , l'extension $\tilde{K}/Q$ est donc métacyclique. Cela étant le ℓ -groupe des classes $\mathfrak{H}_{\tilde{K}}$ est réduit à 1 (cf. prop.IV.11) et toute unité de K est norme d'une unité de $\tilde{K}$ (cf. prop.IV.3).

Considérons donc l'unique sous-extension N de $\tilde{K}$, qui est de degré ℓ sur K . D'après ce qui précède, N est une extension métacyclique de degré ℓn sur $\mathbb{Q}$ et l'application norme envoie $\mathfrak{G}_N$ sur $\mathfrak{G}_K$; ce qui s'écrit $p = 0$. Par ailleurs (cf. IV, § 3, scol.), la majoration $q_{\chi}^{i+1} \leq k_{\chi}^i$, pour tout $i \pmod{n}$, nous donne $q_{\chi} = q_{\chi}^2 = 1$.

D'où la décomposition annoncée :

$$\mathfrak{G}_N \simeq \mathfrak{g}^2 \oplus \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{E}_{n-1}.$$

En particulier, le module $\mathfrak{G}_N$ n'est monogène que pour $n = 2$. D'où le corollaire, puisqu'il est équivalent dans ce dernier cas de dire qu'il existe une unité de Minkovski pour $\mathfrak{G}_N$ ou pour E_N (cf. [Mo 1]).

Des exemples de corps satisfaisant aux conditions du théorème V.6 sont donnés au Chapitre VI.

CHAPITRE VI

RESULTATS NUMERIQUES

Nous réunissons sous ce titre trois tables de corps de nombres destinées à illustrer les résultats des chapitres précédents :

- une liste de corps cycliques réels (de degré 2, 3 et 4) possédant un ℓ -groupe des classes cyclique .
- une table donnant la structure galoisienne du groupe des unités et du groupe des 3-classes d'idéaux des corps diédraux imaginaires $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}, \zeta_3]$.
- une table donnant la structure galoisienne du groupe des unités et du 3-groupe des classes relatives des corps diédraux réels.

Elles ont été réalisées à partir des tables :

- [G] M.N. GRAS Classes et unités des extensions cycliques réelles de degré 4 de $\mathbb{Q}$.
Publ. Math. Fac. Sc. Besançon (1978-79) .
- [O] B. ORIAT Groupes des classes des corps quadratiques réels $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$, $d < 10000$.
Fac. Sc. Besançon .
- [S] R. SMADJA Calculs effectifs sur les idéaux des corps de nombres algébriques .
Univ. Aix-Marseille- Luminy (1976) .

1. Tables de corps cycliques réels dont le ℓ -groupe des classes est cyclique.

Il s'agit de corps cycliques réels de degré n , dont le ℓ -groupe des classes est cyclique d'ordre ℓ^s , et qui satisfont aux conditions du théorème V.6.

Pour chacun d'entre eux, il existe une unique extension cyclique relative de degré ℓ , qui est non ramifiée. Elle est métacyclique sur $\mathbb{Q}$; son ℓ -groupe des classes est cyclique d'ordre ℓ^{s-1} , et le groupe de ses unités est isomorphe à la somme directe :

$$\mathbb{C}_N \simeq \mathfrak{O}^2 \oplus \mathfrak{H}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{H}_{n-1}.$$

§ 1. CORPS QUADRATIQUES RÉELS $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ (d'après [O]).

$\ell^s = 3$

79	142	223	229	235	254	257	321	326	346	359
427	433	469	473	506	574	659	697	730	733	761
785	786	839	842	874	894	895	898	899	906	934
985	993	1086	1090	1091	1101	1171	1191	1211	1223	1229
1257	1339	1342	1345	...						

$\ell^s = 5$

401	499	817	982	1093	1111	1226	1327	1393	1429	1486
-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------

$\ell^s = 7$

597	1009	1087	1294	1534	1761	1934	2026	2251	2302	2467
-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

$\ell^s = 9$

1129	1634	3137	3719	4534	...
------	------	------	------	------	-----

$\ell^s = 11$

1297	4009	4762	6081
------	------	------	------

$\ell^s = 13$

4759	8101	8441	8647
------	------	------	------

$\ell^s = 17$

7054

$\ell^s = 27$

8761

Pour chacun de ces corps, le groupe des unités de N s'écrit $\mathbb{C}_N \simeq \mathfrak{O} \oplus \mathfrak{H}_1$. Il est $\mathbb{Z}_\ell[G]$ -monogène.

§ 2 . CORPS CUBIQUES CYCLIQUES (d'après [S]) .

Les corps sont définis par leur conducteur .

$$\ell^S = 7$$

313 877 1129 1567 1831 1987 2263 2437 2557 2763
3217 3571 3789 4039 4167 4219 4428 4837 5707 5953
6169 6487 6649 7489 8629 ...

$$\ell^S = 13$$

1063 1459 9241 15259 ...

$$\ell^S = 19$$

1489 2659 3313 3529 3547 5557 6013 8017 ...

$$\ell^S = 31$$

5119 9127 9907

$$\ell^S = 37$$

$$\ell = 43$$

8269 12889 ...

11779

$$\ell^S = 49$$

$$\ell = 109$$

7351 8563 18367

13669

§ 3 . CORPS QUARTIQUES REELS (d'après [G]) .

Les corps sont définis par leur conducteur (à l'exception des
trois cas $f = 935, 976, 1513$)

$$\ell^S = 5$$

212 401 427 457 551 629 641 692 728 808 857
916 935 944 976 977 ...

$$\ell^S = 13$$

1172 1513 2443 2617 2932 3041 ...

$$\ell^S = 17$$

1697 2417 3551 ...

2 . Table des corps diédraux $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}, \sqrt{-3}]$.

Nous appliquons les résultats des chapitres précédents , en prenant pour L un corps cubique pur $L = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}]$. Sa clôture normale N est une extension diédrale de groupe $\mathfrak{S}_3$; l'arête cyclique de l'extension étant alors le corps cyclotomique $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$.

§ 1 . STRUCTURE DU GROUPE DES UNITES .

Soit $\mathfrak{u} = \mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} (E_N/\mu_K)$ le tensorisé du groupe des unités de N , modulo la $\mathbb{Z}$ -torsion . Par opération du groupe de Galois , $\mathfrak{u}$ est canoniquement un $\mathfrak{R}$ -module projectif , isomorphe en tant que tel , soit à l'anneau cyclotomique $A = \mathbb{Z}_3[\zeta]$, soit à son idéal maximal $\mathfrak{A}$. Cette alternative repose sur un problème diophantien : en effet , si ϵ_0 désigne une unité fondamentale de L , l'équation :

$$\epsilon_0^{1-\sigma} \in \mu_K E_N^3 ,$$

insoluble dans le premier cas , ne l'est pas dans le second .

En ce qui concerne le module des unités $\mathfrak{E} = \mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} E_N$, deux cas se présentent :

- ou bien ζ n'est pas norme d'une unité , et le sous-groupe de torsion μ est facteur direct de $\mathfrak{E}$.
- ou bien ζ est norme d'une unité , et $\mathfrak{E}$ est de la forme $\mathbb{E}_1/\nu\ell \mathbb{E}_1$; ce que nous abrégeons en $\mathbb{E}/\nu\ell$. Dans ce dernier cas le quotient $\mathfrak{u}$ est toujours de type $\mathfrak{A}$.

Cette seconde alternative est également reliée à un problème diophantien : l'équation

$$\epsilon_0 \in L^3 \mathbb{Q} ,$$

n'admettant de solution que dans le seul cas où $\mathfrak{E}$ est isomorphe à $\mu \oplus \mathfrak{A}$.

Désignons par $\mathfrak{F}$ le sous- $\mathbb{Z}_3[G]$ -module de $\mathfrak{E}$ engendré par $\mathfrak{E}_L$ et μ ; puis par α la 3-valuation du quotient $[\mathfrak{E}:\mathfrak{F}]$. La discussion ci-dessus se résume dans le tableau suivant qui contient les résultats de [BC] et [HK 2] :

$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{F}$	α	q_0	q_1	p_0	$\epsilon_0^{1-\sigma} \in N^3$	$\epsilon_0^{1-\sigma} \in \zeta^{-1} N^3$	$\epsilon_0 \in L^3 \mathbb{Q}$
$\mu \oplus A$	$\mu \oplus A$	0	1	1	1	non	non	non
$\mu \oplus \mathfrak{A}$	$\mu \oplus \mathfrak{A}^2$	1	0	2	1	oui	non	oui
$\mathbb{E}/\nu\ell$	$\mu \oplus \mathfrak{A}^2$	1	0	1	0	non	oui	non

§ 2 . STRUCTURE DU 3-GROUPE DES CLASSES .

Par action du groupe de Galois , le 3-groupe $\mathfrak{K}$ des classes d'idéaux du corps N , est de façon naturelle un $\mathfrak{K}$ -module fini , isomorphe comme tel à une somme directe :

$$\mathfrak{K} = \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} / \mathfrak{g}^{\beta} .$$

Dans cette décomposition , les indices α sont comptés par la formule des genres et les indices β par celle des classes ambiges .

La première s'écrit :

$$\tilde{\rho}_0 = r_1 \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}_1 = r_0 - \omega_1 - 1 ;$$

et la seconde se met sous la forme :

$$\rho_0 = \pi_0 + p_0 - \omega_0 \quad \text{et} \quad \rho_1 = \pi_1 = r_1 - q_0 , \quad \text{avec} \quad \pi_0 = r_0 - q_1 .$$

L'indice r_0 représente le nombre d'idéaux premiers totalement ramifiés dans $L/\mathbb{Q}$, et r_1 le nombre de ces idéaux qui se décomposent dans l'extension $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]/\mathbb{Q}$.

Quant à la 3-valuation h du nombre de classes , elle est donnée par la formule

$$h = 2 h_0 - q_0 ,$$

où h_0 désigne la 3-valuation du nombre de classes de L .

En particulier , h et h_0 s'annulent simultanément ; ce qui se produit très exactement dans les quatre cas suivant :

$$\begin{array}{ll} m = 3 ; & m = 3p^{\alpha} , \quad p \text{ premier}, p \equiv 2 (3) \\ m = p , \quad p \text{ premier} , \quad p \equiv 2 (3) ; & m = pq^{\alpha} \equiv \pm 1 (9) , \quad p \equiv q \equiv 2 (3) \end{array}$$

Les calculs qui suivent ont été réalisés à partir des tables de R. Smadja [S] qui donnent l'unité fondamentale ϵ_0 du corps cubique L , son nombre de classes , et le nombre de classes de L qui sont engendrées par des idéaux ambiges .

Structure galoisienne du module des Unités et du 3-groupe des classes d'idéaux

pour les corps $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{m}, \sqrt{-3}]$, $m < 500$.

m	Conducteur f	Ramification		C ₀ norme	3-classes d'Idéaux					Groupe des unités				3-groupe des classes			
		inertes	décomp.		h ₀	p ₀	p ₁	$\tilde{p}_0$	$\tilde{p}_1$	π_0	q ₀	q ₁	P ₁	type	h	Structure	
2	2.3	2, 3		oui							0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$			
3	3 ²	3										0	1	0	$\Xi/\sqrt{p}$		
5	3.5	3, 5										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
6	2.3 ²	2, 3										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
7	3.7	3	7		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
10	2.5	2, 5		oui							0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$			
11	3.11	3, 11										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
12	2.3 ³	2, 3										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
13	3.13	3	13		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
14	2.3.7	2, 3	7		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	A/R $\oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$	
15	3 ² .5	3, 5		oui							0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$			
17	17	17										0	1	0	$\Xi/\sqrt{p}$		
19	19		19		1	1	0	1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
20	2.3.5	2, 3, 5			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$	
21	3 ² .7	3	7		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
22	2.3.11	2, 3, 11		oui	1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$	
23	3.23	3, 23										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
26	2.13	2	13		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
28	2.7	2	7		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
29	3.29	3, 29										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
30	2.3 ² .5	2, 3, 5		oui	1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$	
31	3.31	3	31		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
33	3 ² .11	3, 11										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
34	2.3.17	2, 3, 17			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$	
35	5.7	5	7		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
37	37		37	oui	1	1	0	1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
38	2.3.19	2, 3	19		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	A/R $\oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$	
39	3 ² .13	3	13		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
41	3.41	3, 41										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
42	2.3 ² .7	2, 3	7		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	A/R $\oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$	
43	3.43	3	43	oui	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	A/R	
44	2.11	2, 11										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
45	3 ² .5	3, 5										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
46	2.23	2, 23										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
47	3.47	3, 47										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
51	3 ² .17	3, 17		oui	1	1	0	0	1	0	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$	
52	2.3.13	2, 3	13		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	A/R $\oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$	
53	53	53										0	1	0	$\Xi/\sqrt{p}$		
55	5.11	5, 11										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
57	3 ² .19	3	19		1	1	1	1	1	1	0	1	0	$\Xi/\sqrt{p}$	2	A/R $\oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$	
58	2.3.29	2, 3, 29		oui	1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$	
59	3.59	3, 59										0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
60	2.3 ² .5	2, 3, 5			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$	

m	Conducteur f	Ramification		C ₁ norme	3-classes d'idéaux					Groupe des Unités				3-Groupe des classes		
		Inertes	Decomp.		h ₀	p ₀	p ₁	$\tilde{p}_0$	$\tilde{p}_1$	π_0	q ₀	q ₁	P ₁	Type	h	Structure
61	3.61	3	61		1	0	1	1	0	0	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z}^2$
62	2.31	2	31		1	0	1	1	0	0	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z}^2$
63	3 ² .7	3	7		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{Z}$
65	3.5.13	3, 5	13		2	2	0	1	1	2	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
66	2.3 ² .11	2, 3, 11			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
67	3.67	3	67		1	0	1	1	0	0	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z}^2$
68	2.3.17	2, 3, 17			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
69	3 ² .23	3, 23									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
70	2.3.5.7	2, 3, 5	7		2	2	1	1	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	4	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
71	71	71			oui						0	1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{Z}}$		
73	73		73	oui	1	1	0	1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{Z}$
74	2.3.37	2, 3	37		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$
76	2.3.19	2, 3	19		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$
77	3.7.11	3, 11	7		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$
78	2.3 ² .13	2, 3	13		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$
79	3.79	3	79		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{Z}$
82	2.41	2, 41									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
83	3.83	3, 83									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
84	2.3 ² .7	2, 3	7		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$
85	3.5.17	3, 5, 17			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
86	2.3.43	2, 3	43		2	2	0	1	1	2	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
87	3 ² .29	3, 29									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
89	89	89		oui							0	1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{Z}}$		
90	2.3 ² .5	2, 3, 5			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
91	7.13		7, 13		2	1	1	2	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{Z} \oplus A/\mathbb{Z}^2$
92	2.3.23	2, 3, 23			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
93	3 ² .31	3	31		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{Z}$
94	2.3.47	2, 3, 47			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
95	3.5.19	3, 5	19		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$
97	3.97	3	97		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{Z}$
99	3 ² .11	3, 11									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
101	3.101	3, 101									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
102	2.3 ² .17	2, 3, 17			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
103	3.103	3	103		1	0	1	1	0	0	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z}^2$
105	3.5.7	3, 5	7		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$
106	2.3.53	2, 3, 53			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
107	107	107		oui							0	1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{Z}}$		
109	109		109	oui	1	1	0	1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{Z}$
110	2.3.5.11	2, 3, 5, 11			2	2	0	0	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	4	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3 \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
111	3 ² .37	3	37	oui	1	1	1	1	1	1	0	1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{Z}}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$
113	3.113	3, 113									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
114	2.3 ² .19	2, 3	19		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$
115	3.5.23	3, 5, 23			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}^3$
116	2.29	2, 29									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
117	3 ² .13	3	13		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{Z}$
118	2.59	2, 59									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$		
119	3.7.17	3, 17	7		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$
122	2.3.61	2, 3	61		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{Z}$	2	$A/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\mathbb{Z}^2$

m	Conducteur f	Ramification		G norme	3-classes d'idéaux					Groupe des Unités				3-Groupe des classes		
		Inertes	Decomp.		h ₀	p ₀	p ₁	$\tilde{p}_0$	$\tilde{p}_1$	π_0	q ₀	q ₁	A ₁	Type	h	Structure
123	3 ² .41	3,41		oui							0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$		
124	2.3.31	2,3	31		2	2	0	1	1	2	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	3	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^3$
126	2.3 ² .7	2,3	7		2	2	0	1	1	2	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	3	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^3$
127	127		127		1	1	0	1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	1	$\mathbb{A}/\mathbb{R}$
129	3 ² .43	3	43		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	1	$\mathbb{A}/\mathbb{R}$
130	2.3.5.13	2,3,5	13		2	2	1	1	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	4	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^3$
131	3.131	3,131									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$		
132	2.3 ² .11	2,3,11			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^3$
133	3.7.19	3	7,19		2	2	1	2	1	2	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	3	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2$
134	2.67	2	67		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	1	$\mathbb{A}/\mathbb{R}$
137	3.137	3,137								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$			
138	2.3 ² .23	2,3,23		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^3$	
139	3.139	3	139	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	1	$\mathbb{A}/\mathbb{R}$	
140	2.3.5.7	2,3,5	7	2	2	1	1	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	4	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^3$	
141	3 ² .47	3,47								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$			
142	2.3.71	2,3,71		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^3$	
143	11.13	11	13	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	1	$\mathbb{A}/\mathbb{R}$	
145	5.29	5,29								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$			
146	2.3.73	2,3	73	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2$	
148	2.3.37	2,3	37	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2$	
149	3.149	3,149								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$			
150	2.3 ² .5	2,3,5		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^3$	
151	3.151	3	151	1	0	1	1	0	0	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R}^2$	
153	3 ² .17	3,17		oui	2	1	0	0	1	1	0	1	0	$\mathbb{E}/\mathbb{R}$	4	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^5$
154	2.7.11	2,11	7	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2$	
155	3.5.31	3,5	31	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2$	
156	2.3 ² .13	2,3	13	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2$	
157	3.157	3	157	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	1	$\mathbb{A}/\mathbb{R}$	
158	2.3.79	2,3	79	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2$	
159	3 ² .53	3,53		oui	1	1	0	0	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^3$	
161	7.23	23	7	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	1	$\mathbb{A}/\mathbb{R}$	
163	163		163	oui	1			1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	1	$\mathbb{A}/\mathbb{R}$
164	2.3.41	2,3,41		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^3$	
165	3 ² .5.11	3,5,11		2	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	4	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^5$	
166	2.3.83	2,3,83		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^3$	
167	3.167	3,167								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$			
170	2.5.17	2,5,17		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^3$	
171	3 ² .19	3	19	oui	1	1	1	1	1	0	1	0	$\mathbb{E}/\mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2$	
172	2.43	2	43	1	0	1	1	0	0	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R}^2$	
173	3.173	3,173								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$			
174	2.3 ² .29	2,3,29		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^3$	
175	3.5.7	3,5	7	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2$	
177	3 ² .59	3,59								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$			
178	2.3.89	2,3,89		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{R}/\mathbb{R}^3$	
179	179	179		oui						0	1	0	$\mathbb{E}/\mathbb{R}$			
181	181		181	oui	1	1	0	1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	1	$\mathbb{A}/\mathbb{R}$
182	2.3.7.13	2,3	7,13		3	3	1	2	2	3	1	1	1	$\mu \oplus \mathbb{A}$	5	$\mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{A}/\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}/\mathbb{R}^3$
183	3 ² .61	3	61		1	0	1	1	0	0	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{R}$	2	$\mathbb{A}/\mathbb{R}^2$

m	Conducteur f	Ramification		C ₁ norme	3-classes d'idéaux					Groupe des Unités			3-Groupe des classes				
		Inertes	Decomp.		h ₀	P ₀	P ₁	P̃ ₀	P̃ ₁	π ₀	q ₀	q ₁	A	Type	h	Structure	
185	3.5.37	3,5	37		1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²	
186	2.3 ² .31	2,3	31		1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²
187	3.11.17	3,11,17			1	1	0	0	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³
188	2.47	2,47										0	2	1	μ ⊗ ℓ		
190	2.5.19	2,5	19		1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²
191	3.191	3,191										0	2	1	μ ⊗ ℓ		
193	3.193	3	193		1	0	1	1	0	0	0	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ²
194	2.3.97	2,3	97		1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²
195	3 ² .5.13	3,5	13		1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²
197	197	197			oui							0	1	0	≡/√ℓ		
198	2.3 ² .11	2,3,11			1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
199	199		199	oui	2	1	0	1	0	0	1	1	1	μ ⊗ A	3	A/ℓ ³	
201	3 ² .67	3	67		1	0	1	1	0	0	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ²	
202	2.3.101	2,3,101			1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
203	3.7.29	3,29	7		2	2	0	1	1	2	1	1	1	μ ⊗ A	3	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ³	
204	2.3 ² .17	2,3,17			1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
205	3.5.41	3,5,41			1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
206	3.103	3	103		1	1	0	1	0	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
207	3 ² .23	3,23									0	2	1	μ ⊗ ℓ			
209	3.11.19	3,11	19		3	2	0	1	1	2	1	1	1	μ ⊗ A	5	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ³	
210	2.3 ² .5.7	2,3,5	7		2	2	1	1	2	2	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ² ⊗ ℓ/ℓ ³	
211	3.211	3	211		1	1	0	1	0	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
212	2.3.53	2,3,53			1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
213	3 ² .71	3,71		oui	1	1	0	0	1	0	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
214	2.3.107	2,3,107			1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
215	5.43	5	43		1	1	0	1	0	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
217	7.31	7,31			3	1	1	2	0	1	1	1	1	μ ⊗ A	5	A/ℓ ² ⊗ A/ℓ ³	
218	2.3.109	2,3	109		2	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ³	
219	3 ² .73	3	73	oui	2	1	1	1	1	0	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ³	
220	2.3.5.11	2,3,5,11			2	2	0	0	2	2	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	ℓ/ℓ ³ ⊗ ℓ/ℓ ³	
221	3.13.17	3,17	13		1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²	
222	2.3 ² .37	2,3	37		2	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ³	
223	3.223	3	223		1	1	0	1	0	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
226	2.113	2,113									0	2	1	μ ⊗ ℓ			
227	3.227	3,227									0	2	1	μ ⊗ ℓ			
228	2.3 ² .19	2,3	19		2	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ⁴	
229	3.229	3	229		1	1	0	1	0	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
230	2.3.5.23	2,3,5,23			2	2	0	0	2	2	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	ℓ/ℓ ³ ⊗ ℓ/ℓ ³	
231	3 ² .7.11	3,11	7		2	2	0	1	1	2	1	1	1	μ ⊗ A	3	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ³	
233	233	233		oui							0	1	0	≡/√ℓ			
234	2.3 ² .13	2,3	13		1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²	
235	5.47	5,47									0	2	1	μ ⊗ ℓ			
236	2.3.59	2,3,59			1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
237	3 ² .79	3	79		1	1	0	1	0	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
238	2.3.7.17	2,3,17	7		2	2	1	1	2	2	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ² ⊗ ℓ/ℓ ³	
239	3.239	3,239									0	2	1	μ ⊗ ℓ			
241	3.241	3	241		1	1	0	1	0	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
244	2.61	2	61		1	1	0	1	0	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	

m	Conducteur f	Ramification		G norme	3-classes d'idéaux					Groupe des Unités				3-Groupe des classes			
		Inertes	Decomp.		h ₀	P ₀	P ₁	P̃ ₀	P̃ ₁	n ₀	q ₀	q ₁	P ₁	Type	h	Structure	
246	2.3 ² .41	2, 3, 41		oui	1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
247	3.13.19	3	13, 19		2	2	1	2	1	2	1	1	1	1	μ ⊗ A	3	A/ℓ ⊗ A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²
249	3 ² .83	3, 83										0	2	1	μ ⊗ ℓ		
251	251	251										0	1	0	≡/vℓ		
252	2.3 ² .7	2, 3	7		1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²
253	11.23	11, 23										0	2	1	μ ⊗ ℓ		
254	2.3.127	2, 3	127		3	2	0	1	1	2	1	1	1	1	μ ⊗ A	5	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ
255	3 ² .5.17	3, 5, 17			1	1	0	0	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³
257	3.257	3, 257										0	2	1	μ ⊗ ℓ		
258	2.3 ² .43	2, 3	43		1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²
259	3.7.37	3	7, 37	2	1	2	2	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	A/ℓ ⊗ A/ℓ ² ⊗ ℓ/ℓ ²	
261	2.5.13	2, 5	13	1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²	
261	3 ² .29	3, 29		oui							0	2	1	μ ⊗ ℓ			
262	2.131	2, 131										0	2	1	μ ⊗ ℓ		
263	3.263	3, 263										0	2	1	μ ⊗ ℓ		
265	2.5.53	2, 5, 53			1	1	0	0	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³
266	2.3.7.19	2, 3	7, 19		2	2	2	2	2	2	2	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	A/ℓ ⊗ A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ² ⊗ ℓ/ℓ ²
267	3 ² .89	3, 89			1	1	0	0	1	0	0	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³
268	2.3.67	2, 3	67		1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²
269	269	269			oui							0	1	0	≡/vℓ		
271	271	271			oui	1	1	0	1	0	0	1	1	1	A ⊗ ℓ	1	A/ℓ
273	3 ² .7.13	3	7, 13		2	1	2	2	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	A/ℓ ⊗ A/ℓ ² ⊗ ℓ/ℓ ²
274	2.3.137	2, 3, 137		1	1	0	0	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
275	3.5.11	3, 5, 11		1	1	0	0	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
276	2.3 ² .23	2, 3, 23		1	1	0	0	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
277	3.277	3	277	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
278	2.139	2	139	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
279	3 ² .31	3	31	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
281	3.281	3, 281		oui							0	2	1	μ ⊗ ℓ			
282	2.3 ² .47	2, 3, 47			1	1	0	0	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³
283	3.283	3	283		1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ
284	2.3.71	2, 3, 71			1	1	0	0	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³
285	3 ² .5.19	3, 5	19		1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²
286	2.3.11.13	2, 3, 11	13		2	2	1	1	2	2	2	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ² ⊗ ℓ/ℓ ³
287	7.41	41	7		1	0	1	1	0	0	0	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ²
290	2.3.5.29	2, 3, 5, 29			2	2	0	0	2	2	2	0	2	1	μ ⊗ ℓ	4	ℓ/ℓ ³ ⊗ ℓ/ℓ ³
291	3 ² .97	3	97		1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ
292	2.3.73	2, 3	73		1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²
293	3.293	3, 293									0	2	1	μ ⊗ ℓ			
295	3.5.59	3, 5, 59		1	1	0	0	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
298	2.149	2, 149									0	2	1	μ ⊗ ℓ			
299	3.13.23	3, 23	13	1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²	
301	3.7.43	3	7, 43	2	2	1	2	1	2	2	1	1	1	μ ⊗ A	3	A/ℓ ⊗ A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²	
302	2.3.151	2, 3	151	1	1	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	A/ℓ ⊗ ℓ/ℓ ²	
303	3 ² .101	3, 101									0	2	1	μ ⊗ ℓ			
305	5.61	5	61	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	
306	2.3 ² .17	2, 3, 17		1	1	0	0	1	1	1	0	2	1	μ ⊗ ℓ	2	ℓ/ℓ ³	
307	307	307		oui	1	1	0	1	0	0	1	1	1	μ ⊗ A	1	A/ℓ	

m	Conducteur f	Ramification		C ₁ norme	3-classes d'idéaux				Groupe des Unités				3-Groupe des classes	
		Inertes	Decomp.		h ₀	P ₀ P ₁	$\tilde{P}_0$ $\tilde{P}_1$	π_0	q ₀ q ₁	P ₁	Type	h	Structure	
308	2.3.7.11	2, 3, 11	7		2	2 1	1 2	2	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
309	3 ² .103	3	103		1	0 1	1 0	0	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C}^2$	
310	2.3.5.31	2, 3, 5	31		2	2 1	1 2	2	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
311	3.311	3, 311							0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
313	3.313	3	313		1	1 0	1 0	1	1 1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
314	2.157	2	157		1	0 1	1 0	0	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C}^2$	
315	3 ² .5.7	3, 5	7		1	1 1	1 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
316	2.79	2	79		1	1 0	1 0	1	1 1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
317	3.317	3, 317							0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
318	2.3 ² .53	2, 3, 53			1	1 0	0 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
319	3.11.29	3, 11, 29			1	1 0	0 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
321	3 ² .107	3, 107		oui	2	1 0	0 1	1	0 1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{C}}$	4	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^5$	
322	2.3.7.23	2, 3, 23	7		2	2 1	1 2	2	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
323	17.19	17	19	oui	1	1 1	1 1	1	0 1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{C}}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
325	5.13	5	13		1	0 1	1 0	0	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C}^2$	
326	2.3.163	2, 3	163		1	1 1	1 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
327	3 ² .109	3	109	oui	1	1 1	1 1	1	0 1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{C}}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
329	3.7.47	3, 47	7		1	1 1	1 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
330	2.3 ² .5.11	2, 3, 5, 11			2	2 0	0 2	2	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
331	3.331	3	331		1	1 0	1 0	1	1 1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
332	2.83	2, 83							0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
333	3 ² .37	3	37	oui	1	1 1	1 1	1	0 1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{C}}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
334	2.167	2, 167							0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
335	3.5.67	3, 5	67		2	1 1	1 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
337	3.337	3	337		1	1 0	1 0	1	1 1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
339	3 ² .113	3, 113							0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
340	2.3.5.17	2, 3, 5, 17			2	2 0	0 2	2	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
341	11.31	11	31		1	1 0	1 0	1	1 1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
342	2.3 ² .19	2, 3	19		3	2 0	1 1	2	1 1	1	$\mu \oplus A$	5	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
345	3 ² .5.23	3, 5, 23			1	1 0	0 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
346	2.3.173	2, 3, 173			1	1 0	0 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
347	3.147	3, 147							0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
348	2.3 ² .29	2, 3, 29			1	1 0	0 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
349	3.349	3	349		1	1 0	1 0	1	1 1	1	$\mu \oplus A$	1	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
350	2.5.7	2, 5	7		1	1 1	1 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
353	3.353	3, 353							0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
354	2.3 ² .59	2, 3, 59			1	1 0	0 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
355	3.5.71	3, 5, 71			1	1 0	0 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
356	2.3.89	2, 3, 89			1	1 0	0 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
357	3 ² .7.17	3, 17	7		1	1 1	1 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
358	2.3.179	2, 3, 179			1	1 0	0 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
359	359	359		oui					0 1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{C}}$			
362	2.3.181	2, 3	181		1	1 1	1 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
364	2.3.7.13	2, 3	7, 13		2	2 2	2 2	2	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
365	3.5.73	3, 5	73		1	1 1	1 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
366	2.3 ² .61	2, 3	61		1	1 1	1 1	1	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
367	3.367	3	367		1	0 1	1 0	0	0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C}^2$	
369	3 ² .41	3, 41							0 2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			

m	Conducteur f	Ramification		ζ norme	3-classes d'idéaux					Groupe des Unités				3-Groupe des classes		
		Inertes	Decomp.		h_0	p_0	p_1	$\tilde{p}_0$	$\tilde{p}_1$	n_0	q_0	q_1	p_1	Type	h	Structure
370	2.5.37	2, 5	37	oui	2	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/ \oplus /$
371	3.7.53	3, 53	7		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
372	2.3 ² .31	2, 3	31		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
373	3.373	3	373		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$
374	2.3.11.17	2, 3, 11, 17			2	2	0	0	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
377	13.29	29	13		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$
379	379		379		1	1	0	1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$
380	2.3.5.19	2, 3, 5	19		2	2	1	1	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
381	3 ² .127	3	127		1	1	1	1	1	1	0	1	0	$\Xi/\mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
382	2.3.191	2, 3, 191			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
383	3.383	3, 383								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
385	3.5.7.11	3, 5, 11	7	2	2	1	1	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
386	2.193	2	193	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
387	3 ² .43	3	43	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
388	2.97	2	97	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
389	3.389	3, 389								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
390	2.3 ² .5.13	2, 3, 5	13	2	2	1	1	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
391	3.17.23	3, 23	17	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
393	3 ² .131	3, 131								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
394	2.3.197	2, 3, 197		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
395	5.79	5	79	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
396	2.3 ² .11	2, 3, 11		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
397	397		397	oui	1	1	0	1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$
398	2.3.199	2, 3	199	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
399	3 ² .7.19	3	7.19	2	1	2	2	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus A/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
401	3.401	3, 401								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
402	2.3 ² .67	2, 3	67	2	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/ \oplus \mathbb{C}/$	
403	3.13.31	3	13, 31	2	2	1	2	1	2	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{C} \oplus A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
404	2.101	2, 101								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
406	2.7.29	2, 29	7	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
407	3.11.37	3, 11	37	3	2	0	1	1	2	1	1	1	$\mu \oplus A$	5	$A/ \oplus \mathbb{C}/$	
409	3.409	3	409	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
410	2.3.5.41	2, 3, 5, 41		2	2	0	0	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
411	3.137	3, 137								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
412	2.3.103	2, 3	103	1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	
413	7.59	59	7	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
414	2.3 ² .23	2, 3, 23		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
415	5.83	5, 83								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
417	3 ² .139	3	139	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
418	2.3.11.19	2, 3, 11	19	2	2	1	1	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
419	3.419	3, 419								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
420	2.3 ² .5.7	2, 3, 5	7	2	2	1	1	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
421	3.421	3	421	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
422	2.211	2	211	1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$	
423	3 ² .47	3, 47								0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$			
425	3.5.17	3, 5, 17		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
426	2.3 ² .71	2, 3, 71		1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$	
427	3.7.61	3	7, 61	2	2	1	2	1	2	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{C} \oplus A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$	

m	Conducteur f	Ramification		ζ norme	3-classes d'idéaux					Groupe des Unités				3-Groupe des classes		
		Inertes	Decomp.		h_0	p_0	p_1	$\tilde{p}_0$	$\tilde{p}_1$	π_0	q_0	q_1	A_1	Type	h	Structure
428	2.3.107	2, 3, 107			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
429	3 ² .11.13	3, 11	13		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
430	2.3.5.43	2, 3, 5	43		2	2	1	1	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
431	431	431		oui							0	1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{C}}$		
433	433		433	oui	1	1	0	1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$
434	2.3.7.31	2, 3	7, 31		2	2	2	2	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
435	3 ² .5.29	3, 5, 29			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
436	2.3.109	2, 3	109		2	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
437	3.19.23	3, 23	19		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
438	2.3 ² .73	2, 3	73		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
439	3.439	3	439		1	0	1	1	0	0	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C}^2$
442	2.13.17	2, 17	13		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
443	3.443	3, 443									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$		
444	2.3 ² .37	2, 3	37		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
445	3.5.89	3, 5, 89			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
446	2.3.223	2, 3	223		2	2	0	1	1	2	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
447	3 ² .149	3, 149									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$		
449	449	449		oui							0	1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{C}}$		
451	11.41	11, 41									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$		
452	2.3.113	2, 3, 113			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
453	3 ² .151	3	151		1	0	1	1	0	0	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C}^2$
454	2.3.227	2, 3, 227			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
455	3.5.7.13	3, 5	7, 13		2	2	2	2	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
457	3.457	3	457		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$
458	2.229	2	229		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$
460	2.5.23	2, 5, 23			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
461	3.461	3, 461									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$		
462	2.3 ² .7.11	2, 3, 11	7		2	2	1	1	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
463	3.463	3	463		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$
465	3 ² .5.31	3, 5	31		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
466	2.3.233	2, 3, 233			1	1	0	0	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
467	467	467		oui							0	1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{C}}$		
468	2.3 ² .13	2, 3	13		2	2	0	1	1	2	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
469	7.67		7, 67		2	1	1	2	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{C} \oplus A/\mathbb{C}^2$
470	2.3.5.47	2, 3, 5, 47			2	2	0	0	2	2	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	4	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
471	3 ² .157	3	157		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$
473	3.11.43	3, 11	43		2	2	0	1	1	2	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
474	2.3 ² .79	2, 3	79		2	2	0	1	1	2	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^3$
475	3.5.19	3, 5	19		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
476	2.7.17	2, 17	7		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
477	3 ² .53	3, 53		oui	2	1	0	0	1	1	0	1	0	$\Xi/\sqrt{\mathbb{C}}$	4	$\mathbb{C}/\mathbb{C}^5$
478	2.239	2, 239									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$		
479	3.479	3, 479									0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$		
481	3.13.37	3	13, 37		2	2	1	2	1	2	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{C} \oplus A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
482	2.3.241	2, 3	241		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
483	3 ² .7.23	3, 23	7		1	1	1	1	1	1	0	2	1	$\mu \oplus \mathbb{C}$	2	$A/\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}/\mathbb{C}^2$
485	5.97	5	97		1	1	0	1	0	1	1	1	1	$\mu \oplus A$	1	$A/\mathbb{C}$
487	487		487	oui	2	1	0	1	0	0	1	1	1	$\mu \oplus A$	3	$A/\mathbb{C}^3$

m	Conducteur f	Ramification		C norme	3-classes d'idéaux					Groupe des Unités				3-Groupe des classes		
		Inertes	Décomp		h ₀	P ₀	P ₁	P̃ ₀	P̃ ₁	n ₀	q ₀	q ₁	P ₁	Type	h	Structure
489	3 ² .163	3	163	oui	1	1	1	1	1	1	0	1	0	Ξ/√ℓ	2	A/ℓ ⊕ ℓ/ℓ ²
490	2.3.5.7	2, 3, 5	7		2	2	1	1	2	2	0	2	1	μ ⊕ ℓ	4	A/ℓ ⊕ ℓ/ℓ ² ⊕ ℓ/ℓ ³
491	3.491	3, 491									0	2	1	μ ⊕ ℓ		
492	2.3 ² .41	2, 3, 41			1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊕ ℓ	2	ℓ/ℓ ³
493	3.17.29	3, 17, 29			1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊕ ℓ	2	ℓ/ℓ ³
494	2.13.19	2	13, 19		2	2	1	2	1	2	1	1	1	μ ⊕ A	3	A/ℓ ⊕ A/ℓ ⊕ ℓ/ℓ ²
495	3 ² .5.11	3, 5, 11			2	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊕ ℓ	4	ℓ/ℓ ⁵
497	3.7.71	3, 71	7		2	1	1	1	1	1	0	2	1	μ ⊕ ℓ	4	A/ ⊕ ℓ/
498	2.3 ² .83	2, 3, 83			1	1	0	0	1	1	0	2	1	μ ⊕ ℓ	2	ℓ/ℓ ³
499	3.499	3	499		1	0	1	1	0	0	0	2	1	μ ⊕ ℓ	2	A/ℓ ²

3. Table des corps diédraux réels de degré 6 .

Nous prenons pour L un corps cubique réel non galoisien .
Sa clôture normale est une extension diédrale réelle de groupe $\mathfrak{S}_3$; l'arête cyclique est un corps quadratique $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$.

Les résultats du chapitre précédent montrent qu'il existe a priori cinq structures possibles pour le tensorisé $\mathfrak{G} = \mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} E_N$ du groupe des unités . Désignons par η une unité fondamentale de $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$; par $\mathfrak{F}$ le sous- $\mathbb{Z}_3[G]$ -module de $\mathfrak{G}$ engendré par E_L et E_K ; puis par a la 3-valuation de l'indice $[\mathfrak{G}:\mathfrak{F}]$.

Les différents cas possibles sont résumés dans le tableau suivant :

$\mathfrak{G}$	$\mathfrak{F}$	a	q_0	q_1	p_1	$\eta \in N_{N/K}(E_N)$
$A \oplus \mathbb{H}$	$A \oplus \mathfrak{S}^2 \oplus \Gamma$	1	1	0	0	oui
$\mathfrak{S} \oplus \mathbb{H}$	$\mathfrak{S}^2 \oplus \mathfrak{S}^2 \oplus \Gamma$	2	0	1	0	oui
$\mathfrak{S} \oplus \mathfrak{S} \oplus \Gamma$	$\mathfrak{S}^2 \oplus \mathfrak{S}^2 \oplus \Gamma$	2	0	2	1	non
$A \oplus \mathfrak{S} \oplus \Gamma$	$A \oplus \mathfrak{S}^2 \oplus \Gamma$	1	1	1	1	non
$A \oplus A \oplus \Gamma$	$A \oplus A \oplus \Gamma$	0	2	0	1	non

Les calculs qui suivent ont été réalisés à partir des tables de R. Smadja [S] . Les corps cubiques L sont définis par le polynôme minimal d'un générateur : ils sont classés par ordre de discriminant croissant . Le nombre de classes du sous-corps quadratique provient de la table [O] .

Δ	m	f	Polynôme minimal	Ramification		η	3-classes d'idéaux						Groupe des Unités			3-groupe des classes			
				inertes	décomp.		h_0	ρ_0	ρ_1	$\tilde{\rho}_0$	$\tilde{\rho}_1$	k	q_0	q_1	p_1	Structure	h	h^*	$g\ell^*$
148	37	2	$x^3 - 4x + 3$	2		oui	0					0	0	1	0	$\mathbb{P}$	0		
229	229	1	$x^3 - 4x + 2$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
257	257	1	$x^3 - 5x + 3$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
316	79	1	$x^3 - x^2 - 4x + 2$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
321	321	1	$x^3 - x^2 - 4x + 1$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
404	101	2	$x^3 - x^2 - 5x - 1$	2		oui	0					0	0	1	0	$\mathbb{P}$	0		
469	469	1	$x^3 - x^2 - 5x + 4$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
473	473	1	$x^3 - 5x + 1$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{P}$	0		
564	141	2	$x^3 - x^2 - 5x + 3$	2		oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
568	142	1	$x^3 - x^2 - 6x - 2$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{P}$	0		
621	69	3	$x^3 - 6x + 3$	3		oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
697	697	1	$x^3 - 7x + 5$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
733	733	1	$x^3 - 10x + 11$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
756	21	2,3	$x^3 - 6x + 2$	2,3			0					0	0	2	1	$\mathbb{P} \oplus \mathbb{P} \oplus \mathbb{P}$	0		
761	761	1	$x^3 - 11x + 13$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
785	785	1	$x^3 - x^2 - 6x + 5$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
788	197	2	$x^3 - 20x + 34$			oui	0					0	0	1	0	$\mathbb{P}$	0		
837	93	3	$x^3 - 6x + 1$			oui	0					0	0	1	0	$\mathbb{P}$	0		
892	223	1	$x^3 - x^2 - 8x + 10$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
940	235	1	$x^3 - 7x + 4$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
985	985	1	$x^3 - 13x + 17$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
993	993	1	$x^3 - x^2 - 6x - 3$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
1016	254	1	$x^3 - 6x + 2$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
1076	269	2	$x^3 - 3x + 6$			oui	0					0	0	1	0	$\mathbb{P}$	0		
1101	1101	1	$x^3 - x^2 - 9x + 12$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
1129	1129	1	$x^3 - 7x + 3$			oui	0	0	1	0	1	2	1	0	0	$\mathbb{A}$	1		$\mathbb{P}/\mathbb{P}^2$
1229	1229	1	$x^3 - 14x + 19$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
1257	1257	1	$x^3 - x^2 - 8x + 9$			oui	0					1	1	0	0	$\mathbb{A}$	0		
1300	13	2,5	$x^3 - 10 + 10$	2,5		oui	0					0	0	2	1	$\mathbb{P} \oplus \mathbb{P} \oplus \mathbb{P}$	0		

Δ	m	f	Polynôme minimal	Ramification		η	3-classes d'Ideaux						Groupe des unités				3-groupe des classes		
				Inertes	Décomp.		h_0	ρ_0	ρ_1	$\tilde{\rho}_0$	$\tilde{\rho}_1$	k	q_0	q_1	ρ_1	Structure	h	h^*	gg^*
1304	326	1	$x^3 - x^2 - 30x + 7$			oui	0					1	0	0	A	0			
1345	1345	1	$x^3 - 7x + 1$			oui	0					1	0	0	A	0			
1373	1373	1	$x^3 - 8x + 5$			oui	0					1	0	0	A	0			
1384	346	1	$x^3 - x^2 - 10x + 14$			oui	0					1	0	0	A	0			
1396	349	2	$x^3 - x^2 - 7x + 5$	2		oui	0					0	1	0	Q	0			
1425	57	5	$x^3 - x^2 - 8x - 3$	5		oui	0					0	1	0	Q	0			
1436	359	1	$x^3 - 11x + 12$			oui	0					1	0	0	A	0			
1489	1489	1	$x^3 - 19x + 31$			oui	0					1	0	0	A	0			
1492	373	2	$x^3 - x^2 - 9x - 5$	2		oui	0					1	0	0	A	0			
1509	1509	1	$x^3 - x^2 - 7x + 4$			oui	0					0	1	0	Q	0			
1524	381	2	$x^3 - x^2 - 7x + 1$	2		oui	0					1	0	0	A	0			
1556	389	2	$x^3 - x^2 - 9x + 11$	2		oui	0					0	1	0	Q	0			
1573	13	11	$x^3 - x^2 - 7x + 2$	11		oui	0					0	1	0	Q	0			
1593	177	3	$x^3 - 9x + 7$	3		oui	0					0	1	0	Q	0			
1620	5	2,9	$x^3 - 12x + 14$	2,3		oui	0					1	1	1	$Q \oplus Q \oplus r$	0			
1708	427	1	$x^3 - x^2 - 8x - 2$			oui	0					1	0	0	A	0			
1765	1765	1	$x^3 - x^2 - 11x + 16$			oui	0					1	0	0	A	0			
1772	443	1	$x^3 - 14x + 12$			oui	0					1	0	0	A	0			
1825	73	5	$x^3 - x^2 - 8x + 7$	5		oui	0					0	1	0	Q	0			
1901	1901	1	$x^3 - x^2 - 9x - 4$			oui	0					1	0	0	A	0			
1929	1929	1	$x^3 - x^2 - 10x + 13$			oui	0					1	0	0	A	0			
1937	1937	1	$x^3 - x^2 - 8x - 1$			oui	0					1	0	0	A	0			
1940	485	2	$x^3 - 8x + 2$	2		oui	0					0	1	0	Q	0			
1944	6	9	$x^3 - 9x + 6$	3		oui	0					0	1	0	Q	0			
1957	1957	1	$x^3 - 40x + 97$			oui	0					1	0	0	A	0			
2021	2021	1	$x^3 - 8x + 1$			oui	0					1	0	0	A	0			
2024	506	1	$x^3 - x^2 - 10x - 6$			oui	0					1	0	0	A	0			
2057	17	11	$x^3 - 11x + 11$	11		oui	0					0	1	0	Q	0			
2089	2089	1	$x^3 - 13x + 4$			oui	0					1	0	0	A	0			

Δ	m	f	Polynôme minimal	Ramification		η	3-classes d'idéaux						Groupe des unités			3-groupe des classes		
				Inertes	Decomp.		h_0	ρ_0	ρ_1	$\tilde{\rho}_0$	$\tilde{\rho}_1$	k	q_0	q_1	ρ_1	Structure	h	h
2101	2101	1	$x^3 - 16x + 23$			oui	0					1	0	0	A	0		
2177	2177	1	$x^3 - x^2 - 8x + 5$			oui	0					1	0	0	A	0		
2213	2213	1	$x^3 - x^2 - 13x - 12$			oui	0					1	0	0	A	0		
2228	557	2	$x^3 - 14x + 18$	2		oui	0					0	1	0	C	0		
2233	2233	1	$x^3 - x^2 - 8x + 1$			oui	0					1	0	0	A	0		
2241	249	3	$x^3 - 9x + 5$	3		oui	0					0	1	0	C	0		
2292	573	2	$x^3 - x^2 - 43x - 95$	2		oui	0					0	1	0	C	0		
2296	574	1	$x^3 - x^2 - 14x - 14$			oui	0					1	0	0	A	0		
2300	23	5	$x^3 - x^2 - 8x + 2$	5		oui	0					0	1	0	C	0		
2349	29	9	$x^3 - 12x + 13$	3		oui	0					0	1	0	C	0		
2429	2429	1	$x^3 - x^2 - 15x - 16$			oui	0					1	0	0	A	0		
2505	2505	1	$x^3 - x^2 - 10x - 5$			oui	0					1	0	0	A	0		
2557	2557	1	$x^3 - x^2 - 9x - 2$			oui	0					1	0	0	A	0		
2589	2589	1	$x^3 - x^2 - 45x - 102$			oui	0					1	0	0	A	0		
2597	53	7	$x^3 - x^2 - 9x + 8$		7	oui	1	1	0	1	0	1	1	1	C	0	1	A/C
2636	659	1	$x^3 - x^2 - 16x - 18$			oui	0					1	0	0	A	0		
2673	33	9	$x^3 - 9x + 3$	3		oi	0					0	1	0	C	0		
2677	2677	1	$x^3 - 10x + 7$			oui	0					1	0	0	A	0		
2700	3	5	$x^3 - 15x + 20$	5		oui	0					0	1	0	C	0		
2708	677	2	$x^3 - x^2 - 11x - 7$	2		oui	0					0	1	0	C	0		
2713	2713	1	$x^3 - 13x + 15$			oui	0					1	0	0	A	0		
2777	2777	1	$x^3 - 17x + 25$			oui	0					1	0	0	A	0		
2804	701	2	$x^3 - 26x + 50$	2		oui	0					0	1	0	C	0		
2808	78	3	$x^3 - 9x + 2$	3		oui	0					0	1	0	C	0		
2836	709	2	$x^3 - x^2 - 9x + 7$	2		oui	0					0	1	0	C	0		
2857	2857	1	$x^3 - 25x + 47$			oui	0					1	0	0	A	0		
2917	2917	1	$x^3 - x^2 - 13x + 20$			oui	0					1	0	0	A	0		
2920	730	1	$x^3 - 37x + 86$			oui	0					1	0	0	A	0		
2941	2941	1	$x^3 - x^2 - 17x - 20$			oui	0					1	0	0	A	0		

BIBLIOGRAPHIE

- [BC] P.BARRUCAND et H. COHN -
Remarks on principal factors in relative cubic fields.
J. Number Theory , t.3 (1971) .
- [Be] S.D. BERMAN et P.M. GUDIVOK -
Representation of p-adic integers .
Trans. Amer. Math. Soc. Series 2 , Vol. 50 (1966) .
- [Ber] A.M. BERGE -
Anneaux d'entiers et ordres associés .
Thèse Bordeaux 1979 .
- [Bo] N. BOURBAKI -
Algèbre commutative . Hermann Paris .
- [Bou] N. BOURBAKI -
Algèbre . Hermann Paris .
- [Br] A. BRUMER -
On the group of units of an absolutely cyclic number field of
prime degree .
J. Math. Soc. Japan , t.21 (1969) .
- [Ca] T. CALLAHAN -
The 3-class groups of non Galois cubic fields .
Mathematika 21 (1974) .
- [Châ] A. CHATELET -
Idéaux principaux dans les corps circulaires .
Colloque du CNRS - Algèbre et théorie des nombres Paris
1949 - p. 103-106 .
- [Ch] C. CHEVALLEY -
Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les
corps locaux .
J. of the Fac of Science , Tokyo , t.2 (1933) .
- [CL] J.P. SERRE -
Corps locaux - 2^{eme} ed - Hermann 1968 .
- [Co 2] J. COUGNARD -
Propriétés galoisiennes des anneaux d'entiers .
Thèse Bordeaux 1975 .
- [Co 3] J. COUGNARD -
Une propriété de l'anneau des entiers des extensions galoï -
siennes non abéliennes de degré pq des rationnels .
Compositio Mathematica (à paraître) .
- [Co 4] J. COUGNARD -
Remarques sur l'arithmétique de certaines extensions méta -
cycliques (à paraître) .

- [F] A. FROHLICH -
Algebraic Number Fields .
J. Cougnard = un contre-exemple à une conjecture de J. Martinet . Academic Press London 1977 .
- [Fr] A. FROHLICH -
A normal integral basis theorem .
Journ. Alg. 39 (1976) , 131-137 .
- [Ge 1] F. GERTH III -
Rank of 3-class group of non -Galois cubic field .
Acta Arithmetica (1977) .
- [Ge 2] F. GERTH III -
On ℓ -class group of certain number fields .
Mathematika 23 (1976) .
- [Gi] R. GILLARD -
 $\mathbb{Z}_\ell$ -extensions , Fonctions L p-adiques et unités cyclotomiques . Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux (1976-1977) .
- [Gr1] G. GRAS -
Sur les ℓ -classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier ℓ .
Ann. Inst. Fourier , 23 Fasc. 3 et 4 .
- [Gr2] G. GRAS -
Nombre de φ -classes invariantes . Application aux classes des corps abéliens .
Bull. Soc. Math. France , 106, 1978 , p.337-364 .
- [Gr3] G. GRAS -
Sur le 3-rang des corps cubiques non galoisiens .
Séminaire de Théorie des Nombres . Besançon (1974-75) .
- [Gr4] G. GRAS -
Sur les ℓ -classes d'idéaux des extensions non galoisiennes de $\mathbb{Q}$ de degré premier impair ℓ , à clôture galoisienne diédrale de degré 2ℓ .
J. Math. Soc. Japan , t.26 n° 4 (1974) .
- [Hi] D. HILBERT -
Théorie des corps de nombres algébriques .
Ann. Fac. Toulouse (1909-1910) Hermann (1913) .
- [HK1] F. HALTER-KOCH -
Eine Bemerkung über kubische Einheiten .
Archiv der Mathematik , vol. XXVII (1976) .
- [HK2] F. HALTER-KOCH -
Die Struktur der Einheitengruppe für eine Klasse metazyklischer Erweiterungen .
J. für die reine und ang. Math. 301 (1978) , 147-160 .
- [Ii1] K. IIMURA -
Dihedral extensions .
On 3-class groups of non -Galois cubic fields .
Acta arithmetica 35 n° 3 .

[Ii2] K. IIMURA -

A criterion for the class number of a pure quintic to be divisible by 5 .
J. angew. Math. t. 292 (1977) .

[Ke] M.E. KEATING -

Class groups of metacyclic groups of order $p^r q$, p a regular prime .
Mathematika 21 (1974) 90-95 .

[Ko] S. KOBAYASHI -

On the 3-rank of the ideal class groups of certain pure cubic fields .
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. I A , 20 (1973) , 209-216 .

[La] S. LANG -

Cyclotomic Fields . Springer-Verlag (1978) .

[LCP] LENA CHANG PU -

Integral representations of non-abelian groups of order pq .
Mich. Math. J. tome 15 (1975) .

[Le] H.W. LEOPOLDT -

Über die Hauptordnung der ganzen Elementen eines abelschen Zahlkörpers .
J. reine angew. Math. 201 (1959) , 119-149 .

[Lee] M.P. LEE -

Integral representations of dihedral groups of order $2p$.
Trans. Amer. Math. Soc. t.110 (1964) .

[Lo] R.L. LONG -

Algebraic Number Theory .
Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics (1977) .

[Ma] J. MARTINET -

Sur les unités d'une extension galoisienne relative .
Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux (1968-1969).

[Ma1] J. MARTINET -

Sur l'arithmétique des extensions galoisiennes à groupe de Galois diédral d'ordre $2p$.
Ann. Inst. Fourier , 19 (1969) , 1-80 .

[MHK] F. HALTER-KOCH et N. MOSER -

Sur le nombre de classes de certaines extensions métacycliques sur $\mathbb{Q}$ ou sur un corps quadratique imaginaire .
J. Math. Soc. Japan , t.90 (1978) .

[Mo1] N. MOSER -

Unités et nombre de classes d'une extension galoisienne diédrale de $\mathbb{Q}$.
Séminaire de Théorie des nombres de Grenoble (1974) .

[Mo2] N. MOSER -

Contraintes galoisiennes sur le groupe des unités de certaines extensions de $\mathbb{Q}$. Applications arithmétiques .
Thèse Grenoble 1978 .

[No] E. NOETHER -

Normalbasis bei Körpern ohne höhere Verzweigung .
J. reine und angew. Math., 167 (1931) 147-152 .

[Or] B. ORIAT -

Quelques caractères utiles à l'arithmétique .
Séminaire de théorie des nombres de Besançon , 1974-1975 .

[Pa] C.J. PARRY -

Class number relations in pure quintic fields .
Symposia Mathematica , t.15 (1975) .

[Po] J. PORUSCH -

Die Arithmetik in Zahlkörpern , deren zugehörige Galoishe
Körper spezielle metabelsche gruppen besitzen , auf klassen-
körpertheoretische Grundlage .
Math. Z. , t.37 (1933) .

[PW] C.J. PARRY et C.D. WALTER -

The class number of pure field of prime degree .
Mathematika 23-24 (1977) .

[Ro] M. ROSEN -

Representations of twisted group rings .
Ph. D. Thesis , Princeton (1963) .

[Se] J.P. SERRE -

Représentation linéaire des groupes finis . 2^{eme} éd .
Hermann 1971 .

[Wa] C.D. WALTER -

A class number relation in Frobenius extensions of number
fields .
Acta Arithmetica t.24 (1977) .

[Wi] S.M.J. WILSON -

Reduced Norms in the K-theory of orders .
J. of Algebra, vol.46 , p.1-11 (1977) .

